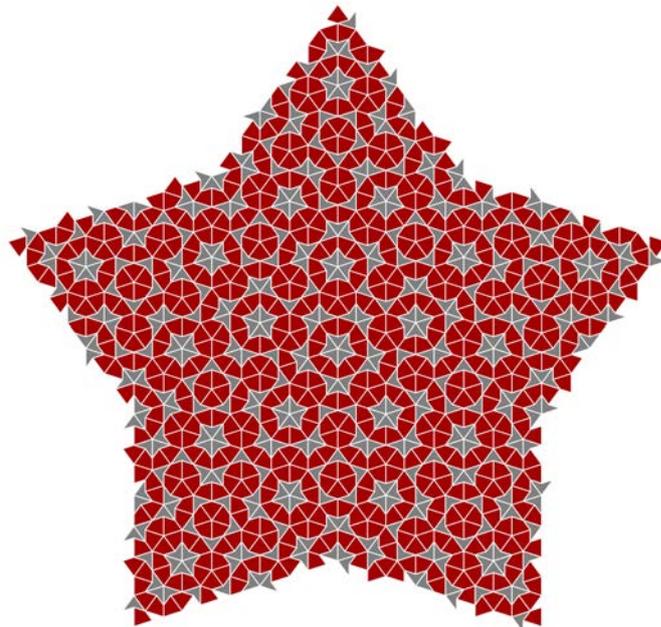


Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg  
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wissenschaftliche Arbeit für das Lehramt an Gymnasien

# Die Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil

## Penrose Tiling with Kite and Dart



Katharina Krapf, [katharinakrapf@gmx.de](mailto:katharinakrapf@gmx.de)

betreut von: Prof. Dr. Anna Wienhard  
Dr. Andreas Ott

Heidelberg, den 1. April 2019



Das Bild auf der Titelseite wurde mithilfe des Codes von [Gab12] erstellt und der Code entsprechend adaptiert.



---

## Selbstständigkeitserklärung

---

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken, gegebenenfalls auch elektronischen Medien, entnommen sind, sind von mir durch Angabe der Quelle und des Zugriffsdatums sowie dem Ausdruck der ersten Seite belegt; sie liegen zudem für den Zeitraum von 2 Jahren entweder auf einem elektronischen Speichermedium im PDF-Format oder in gedruckter Form vor.

Heidelberg, den 1. April 2019

.....  
Katharina Krapf



---

## Abstract

---

In dieser Arbeit wird auf der Grundlage von [Rit14] untersucht, ob eine Parkettierung der Euklidischen Ebene mit der Protokachelmenge Drachen und Pfeil existiert und ob diese im Falle der Existenz aperiodisch ist. Dazu werden zwei gegenläufige Algorithmen, genannt Komposition und Dekomposition, und ein eng mit der Dekomposition verwandter Algorithmus, die Inflation, verwandt. Es zeigt sich, dass die gefundene aperiodische Penrose-Parkettierung trotz ihrer Aperiodizität erstaunlich viel Struktur aufweist, denn es lässt sich eine abgeschwächte Form der Translationssymmetrie feststellen.

This thesis, referring to [Rit14], investigates whether a tiling of the Euclidean plane exists, with kite and dart comprising the set of prototiles, and if this tiling is aperiodic. To this end, two opposing algorithms are deployed, termed composition and decomposition, and a further algorithm, inflation, that is closely related to the latter. It can be shown that the aperiodic Penrose tiling, despite its aperiodicity, demonstrates a surprisingly high level of structure. This can be assigned to a less strict translation symmetry that was shown to occur.



---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Die Penrose-Parkettierung</b>	<b>5</b>
2.1 Definitionen . . . . .	6
2.1.1 Kacheln und Parkettierungen . . . . .	6
2.1.2 Anlegeregeln . . . . .	8
2.1.3 Periodizität und Aperiodizität . . . . .	9
2.2 Die Protokacheln: Der Drachen $K$ und der Pfeil $D$ . . . . .	11
2.2.1 Einführung von Drachen und Pfeil . . . . .	11
2.2.2 Kleinflächige Teilparkettierungen der Ebene mit Drachen und Pfeil . . . . .	13
2.2.3 Beziehung der Kacheln zum regulären Fünfeck . . . . .	18
2.3 Größere Teilparkettierungen mit Drachen und Pfeil . . . . .	19
2.3.1 Komposition und Dekomposition, Inflation und Deflation . . . . .	20
2.3.2 Zusammenfassung der Verfahren . . . . .	31
2.3.3 Beweis der Verfahren . . . . .	32
<b>3 Die Penrose-Parkettierung auf der Ebene und ihre Eigenschaften</b>	<b>39</b>
3.1 Hauptresultat . . . . .	39
3.1.1 Die Existenz der Penrose-Parkettierung auf der Ebene . . . . .	39
3.1.2 Die Aperiodizität der Penrose-Parkettierung auf der Ebene . . . . .	49
3.2 Die Wagenrad-Parkettierung . . . . .	53

<b>4</b>	<b>Resümee und Ausblick</b>	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>Aperiodische Parkettierungen – Eine Abstraktion zum klassischen Geometrieunterricht</b>	<b>65</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>69</b>

---

## Abbildungsverzeichnis

---

2.1	Einfaches Beispiel für eine Kachel . . . . .	6
2.2	Einfache (Teil-)Parkettierung von $\mathbb{E}$ mit Dreiecken . . . . .	7
2.3	Einfache (Teil-)Parkettierung von $\mathbb{E}$ mit markierten Quadraten . . .	9
2.4	Einfache periodische (Teil-)Parkettierung von $\mathbb{E}$ mit Dreiecken . . .	10
2.5	Einfache nicht-periodische (Teil-)Parkettierung von $\mathbb{E}$ mit Dreiecken	11
2.6	Drachen $K$ . . . . .	12
2.7	Pfeil $D$ . . . . .	12
2.8	Sonne . . . . .	13
2.9	Stern . . . . .	13
2.10	Ass . . . . .	13
2.11	Teufel . . . . .	13
2.12	Bube . . . . .	13
2.13	Königin . . . . .	14
2.14	König . . . . .	14
2.15	Beschriftete Protokacheln für den Verlauf des Beweises . . . . .	15
2.16	Konstruktion von Drachen und Pfeil im regelmäßigen Fünfeck . . .	19
2.17	Verschärfte Anlegeregeln . . . . .	20
2.18	Ausschnitt vor Anwendung der Komposition . . . . .	21
2.19	Ausschnitt nach Anwendung des Teilungstricks . . . . .	22
2.20	Ausschnitt nach Anwendung des Kompositionstricks 1 . . . . .	23
2.21	Ausschnitt nach Anwendung des Kompositionstricks 2 . . . . .	24
2.22	Ausschnitt nach Durchführung der Komposition . . . . .	25
2.23	Ausschnitt vor Durchführung der Dekomposition . . . . .	26
2.24	Ausschnitt nach Durchführung des letzten Kompositionsschritts rückwärts . . . . .	27
2.25	Ausschnitt nach Rückwärtsdurchführung des Kompositionstricks 2 .	27

2.26	Ausschnitt nach Rückwärtsdurchführung des Kompositionstricks 1 . . . . .	28
2.27	Ausschnitt nach Rückwärtsdurchführung des Teilungstricks . . . . .	29
2.28	Dekomposition des Asses / Komposition von Batman . . . . .	30
2.29	Zusammenfassung der Verfahren als Diagramm . . . . .	31
2.30	Drachen $K$ mit Symmetrieachse . . . . .	33
2.31	Pfeil $D$ mit Symmetrieachse . . . . .	33
2.32	Drachen $K$ mit Pfeilspitze . . . . .	34
2.33	Pfeil $D$ mit Pfeilspitze . . . . .	34
2.34	Möglichkeit, Pfeil und Drachen aneinanderzulegen . . . . .	35
2.35	Nähere Betrachtung von $\phi B'$ . . . . .	36
2.36	Nähere Betrachtung von $\phi A'$ . . . . .	37
3.1	Abzählung der Gitterpunkte . . . . .	43
3.2	Teilparkettierung $T_0$ (Sonne) . . . . .	48
3.3	1. Durchführung der Dekomposition: $T_1$ . . . . .	48
3.4	2. Durchführung der Dekomposition: $T_2$ . . . . .	48
3.5	3. Durchführung der Dekomposition: $T_3$ . . . . .	48
3.6	4. Durchführung der Dekomposition: $T_4$ . . . . .	48
3.7	5. Durchführung der Dekomposition: $T_5$ . . . . .	48
3.8	Dekomposition des Drachen $K$ . . . . .	51
3.9	Dekomposition des Pfeils $D$ . . . . .	51
3.10	Wagenrad $C_0$ (Ass) . . . . .	53
3.11	Wagenrad $C_1$ . . . . .	53
3.12	Wagenrad $C_2$ . . . . .	53
3.13	Wagenrad $C_3$ . . . . .	53
3.14	Wagenrad $C_0$ (Ass) . . . . .	54
3.15	Wagenrad $C_2$ . . . . .	54
3.16	Wagenrad $C_0$ (Ass) . . . . .	55
3.17	Wagenrad $C_1$ (Batman) . . . . .	55
3.18	Invalide Anlegemöglichkeit . . . . .	56
3.19	Forcierte Anlegemöglichkeiten an die Königin . . . . .	57
3.20	Wagenrad $C_4$ mit den markierten sieben Figuren aus Satz 2.23 . . . . .	58
4.1	Dünne Raute . . . . .	63
4.2	Dicke Raute . . . . .	63
5.1	Markierter Drachen (Vorlage für Schüler*innen) . . . . .	66
5.2	Markierter Pfeil (Vorlage für Schüler*innen) . . . . .	66

# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

Periodische geometrische Muster sind im Alltag allgegenwärtig: Die Pflasterung des Asphalt, das Karo-Papier im Büro beziehungsweise in der Schule oder die Badezimmerkacheln zuhause. Ihnen allen ist gemein, dass man sie um einen festen Parameter nach oben oder unten, nach links oder rechts verschieben kann und dasselbe Muster erhält. Außerdem ist bei diesen Mustern schnell einsichtig, nach welcher Regel sie weitergeführt werden müssten, um eine unendliche Fläche, klassisch die Euklidische Ebene  $\mathbb{R}^2$ , zu überdecken.

Aus mathematischer Perspektive stellt sich nun die Frage, ob es ein Muster auf der Euklidischen Ebene gibt, für das kein solcher Parameter existiert, das also nicht nach oben oder unten, nach links oder rechts verschoben werden kann, sodass das gleiche Muster entsteht. Dieser Frage wollen wir in dieser Arbeit nachgehen. Wir untersuchen dazu zwei spezielle Formen, die aufgrund ihrer Formschönheit [Gla14, Abschn. 12.2, S. 409] als Drachen und Pfeil bekannt wurden. Die Formschönheit der Kacheln hängt mit ihrer Konstruktion zusammen, der wir uns in Abschnitt 2.2.3 widmen. Wir werden zeigen, dass ein Muster, das aus diesen beiden Grundformen aufgebaut ist, tatsächlich keinerlei Translationssymmetrie aufweist und es möglich ist, damit die Euklidische Ebene zu überdecken.

Ein solches Muster werden wir später Parkettierung nennen, vergleichbar mit dem

Parkettboden: Es geht darum, eine Fläche lückenlos und ohne Überschneidungen des Inneren der Formen, nur mit Berührungen an den Ecken und Kanten, nach einer bestimmten Regel auszulegen.

Die Parkettierung, die wir untersuchen, wurde in den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts von Roger Penrose entdeckt. Er modifizierte regelmäßige Fünfecke derart, dass ein Set von sechs verschiedenen Formen entstand, die nur auf bestimmte Art und Weise aneinandergelegt werden dürfen, um ein Muster zu erhalten, das sich nicht wiederholt. Ausgehend von diesem Set entwickelte Penrose dann die beiden Formen Drachen und Pfeil und zwei Rauten; zwischen den beiden Formpaaren besteht ein enger Zusammenhang [Pen79]. Penrose war nicht der erste, der der Frage nachging, ob es Formen gibt, die eine aperiodische Parkettierung erzwingen. Vor ihm zeigte schon Robert Berger, dass mit mehr als 20 000 verschiedenen Formen eine aperiodische Auslegung der euklidischen Ebene möglich ist. Berger selbst reduzierte die Anzahl auf 104 verschiedene Formen und Donald Knuth gelang es ausgehend von dieser Arbeit, die Anzahl auf 92 Formen zu reduzieren. Robert Ammann fand 1977 ebenfalls ein Set von sechs verschiedenen Formen, aber Penrose war der erste, dem es gelang, die Anzahl der Formen auf zwei zu reduzieren: Drachen und Pfeil oder ein Rautenpaar [Gar89, S. 4-6]. Viele der heute bekannten Resultate über Penrose-Parkettierungen stammen von John Conway, so auch die Namen der Formen [Gar89, S. 6].

Unsere Forschungsfrage hat nicht nur erkenntnistheoretische Gründe, sondern auch praktische: Es hat sich herausgestellt, dass Kristalle eine Struktur aufweisen, die sich mit einer periodischen Parkettierung identifizieren lassen. Bis 1984 galten in der Physik Kristalle mit einer periodischen Struktur und amorphe Festkörper als die einzigen zwei Zustandsformen fester Materie. Dann fand eine Forschungsgruppe um Dan Shechtman heraus, dass eine dritte Zustandsform existiert. In einer Aluminium-Mangan-Legierung entdeckten sie eine „quasiperiodische Kristallformation“. Das Muster, das wir in dieser Arbeit untersuchen, kann als Modell eines Querschnitts eines solchen Quasikristalls dienen [Gla14, Abschn. 12.2, S. 411].

Die Grundlage dieser Arbeit sind die Lecture Notes von [Rit14] und Ausführungen

von [GS16] und [Gar89, Kap. 1].

Die Relevanz der Arbeit begründet sich mit der konkreteren Ausführung der vorhandenen Beweise aus den obengenannten Quellen. Des Weiteren wurden einige Beweise in der oben genannten Literatur nicht ausgeführt. Dies waren unter anderem der Beweis der Aussage, dass es genau sieben Möglichkeiten gebe, die beiden Formen Drachen und Pfeil um einen Eckpunkt anzuordnen (Satz 2.23) und die Beweise zu den Algorithmen Komposition, Dekomposition, Inflation und Deflation (2.24-2.29). Hierbei muss gezeigt werden, dass jeder Schritt dieser Algorithmen eindeutig ist und das geforderte Ergebnis liefert. Diese Beweise wurden dementsprechend selbst geführt.

Weiteren Forschungsfragen zur Penrose-Parkettierung widmeten sich u.a. [Beh12], [Bru90], [Bru92], [ER16], [ER17], [Gar89, Kap. 2] und [Gum96].

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im 2. Kapitel legen wir die Grundlage für das Hauptresultat, das heißt, wir führen in Abschnitt 2.1 elementare Definitionen ein, welche die Fragestellung formalisieren. Danach werden in Abschnitt 2.2 die Formen Drachen und Pfeil vorgestellt, mit denen das unendliche Muster gelegt werden soll. Sobald Drachen und Pfeil bekannt sind, können wir zeigen, dass schon kleine Flächen damit ausgelegt werden können. Anschließend können wir in Abschnitt 2.3 mithilfe von Algorithmen zeigen, dass auch größere Flächen mit Drachen und Pfeil ausgelegt werden können, was zur Formulierung des Hauptresultates im 3. Kapitel führt: Die Euklidische Ebene kann auf eine sich nicht wiederholende Weise mit den Formen Drachen und Pfeil ausgelegt werden. Wir zeigen in Abschnitt 3.1.1 die Existenz dieser Überdeckung und ihre Aperiodizität in Abschnitt 3.1.2. Im letzten Unterabschnitt des dritten Kapitels 3.2 zeigen wir, dass die Parkettierung trotz ihrer Aperiodizität eine erstaunliche Eigenschaft hat: Es liegt anschaulich gesprochen eine abgeschwächte Translationssymmetrie vor. Im 4. Kapitel wird das Ergebnis der Arbeit resümiert und ein Ausblick auf einige offene Fragen gegeben. Das 5. Kapitel zeigt, wie eine didaktische Aufbereitung dieses Themas mit Schüler\*innen eines Gymnasiums in einer Mathematik-AG aussehen könnte.



## KAPITEL 2

---

### Die Penrose-Parkettierung

---

#### Die Euklidische Ebene

In dieser Arbeit wollen wir uns mit einer speziellen zweidimensionalen Parkettierung beschäftigen. Eine *Parkettierung* ist nach [Pen87] eine Überdeckung der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit abzählbar unendlich vielen *Formen*, die sich im Inneren nicht überlappen. Wir wollen die euklidische Ebene in dieser Arbeit mit  $\mathbb{E}$  bezeichnen und führen zunächst weitere Notation auf der euklidischen Ebene ein, die für diese Arbeit notwendig ist.

Wir schreiben den *Euklidischen Abstand* zwischen zwei Punkten  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{E}$  als

$$\|x - y\|_2 := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Mithilfe des Euklidischen Abstandes können wir eine Notation für zweidimensionale Kreisscheiben festlegen. Die *abgeschlossene Kreisscheibe* vom Radius  $r$  um den Punkt  $x$  ist gegeben durch die Menge

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{E} \mid \|x - y\|_2 \leq r\},$$

wobei  $\|\cdot\|_2$  den Euklidischen Abstand in  $\mathbb{E}$  bezeichnet.

Im folgenden Abschnitt sollen unter anderem die Begriffe der „Form“ und der „Parkettierung“ formalisiert werden. Die Formen sollen Kacheln genannt werden und bestimmte Bedingungen erfüllen. Dazu soll in Anlehnung an [BSMM04, S. 137] und [BB02, S. 435] an den Begriff eines Polygons erinnert werden. Unter einem *Polygon* verstehen wir eine Teilmenge von  $\mathbb{E}$ , die durch einen endlichen, geschlossenen Streckenzug ohne Selbstüberschneidungen begrenzt wird.

## 2.1 Definitionen

### 2.1.1 Kacheln und Parkettierungen

**Definition 2.1.** Eine *Kachel* ist ein abgeschlossenes Polygon.

Nach dieser Definition besitzt eine Kachel ein offenes Inneres und einen Abschluss aus Kanten und Ecken. Die Definition schließt folglich die leere Menge, Mengen, die nur einen Punkt enthalten, und Mengen, die ausschließlich eine Strecke enthalten, als Kacheln aus, da diese Mengen keine Polygone und somit auch keine Kacheln sind.

*Bemerkung 2.2.* Eine Kachel ist abgeschlossen und beschränkt, also eine kompakte Menge. Zum anderen ist sie nicht-leer und zusammenhängend, sie ist dementsprechend homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe.

**Beispiel 2.3.** Ein einfaches Beispiel für eine Kachel ist ein Quadrat:

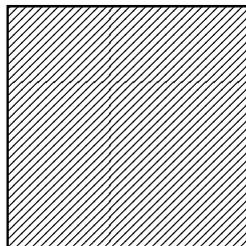


Abbildung 2.1: Einfaches Beispiel für eine Kachel

Entsprechend der Definition fassen wir die Vereinigung des Inneren mit dem Rand als Kachel auf. Im Folgenden verzichten wir zur besseren Übersicht auf die Schraffur des Inneren.

In der folgenden Definition bezeichnen wir das Innere einer Menge  $M$  mit  $M^\circ$ .

**Definition 2.4** (angelehnt an [Lam05, Abschn. 6]). Seien  $\mathbb{E}$  die Euklidische Ebene,  $I$  eine Indexmenge und  $\{P_i\}_{i \in I}$  eine Menge von Kacheln. Wir bezeichnen  $\mathcal{T} := \{P_i\}_{i \in I}$  als eine *Parkettierung* von  $\mathbb{E}$ , wenn  $\mathbb{E} = \bigcup_{i \in I} P_i$  ist und  $P_i^\circ \cap P_j^\circ = \emptyset$  gilt für alle  $i \neq j$ .

Wir wollen jedoch nicht in jeder Situation direkt die gesamte Ebene  $\mathbb{E}$  parkettieren, sondern als Zwischenschritt Teilmengen der Ebene mit Kacheln auslegen.

**Definition 2.5** ([Rit14, Absch 2.2] [Fuc08, Def. 2.1]). Wir bezeichnen eine Parkettierung als *partielle Parkettierung*, *Teilparkettierung* oder *Ausschnitt*, wenn sie eine zusammenhängende Teilmenge der Ebene  $\mathbb{E}$  parkettiert (aber nicht die gesamte Ebene).

**Beispiel 2.6.** Eine einfache Parkettierung ist die Auslegung der Euklidischen Ebene mit Dreiecken:

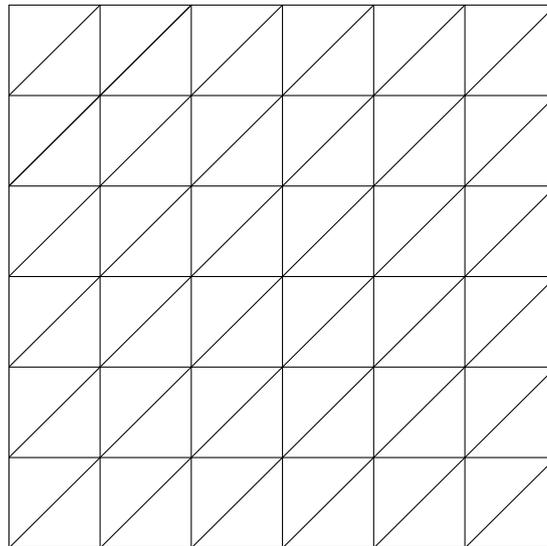


Abbildung 2.2: Einfache (Teil-)Parkettierung von  $\mathbb{E}$  mit Dreiecken

**Definition 2.7** ([Fuc08, Def. 1.3]). Sei  $\mathcal{T}$  eine Parkettierung der Ebene und  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ . Wir bezeichnen  $\mathcal{F}$  als eine Menge von *Protokacheln*, wenn jede Kachel, die in der Parkettierung erscheint, zu genau einem Element aus  $\mathcal{F}$  kongruent ist.

**Definition 2.8.** Wir sprechen von einer *Kopie einer Protokachel*, wenn eine Kachel zu einer Protokachel kongruent ist.

*Bemerkung 2.9.* Eine Parkettierung  $\mathcal{T}$  wird aus Kopien von Protokacheln gelegt. Die Protokacheln stehen für einen unerschöpflichen Vorrat an Kacheln.

**Beispiel 2.10.** Im Beispiel 2.6 ist die Menge der Protokacheln  $\mathcal{F}$  einelementig, denn sie besteht aus einer dreiecksförmigen Kachel, die kongruent zu allen abgebildeten Dreiecken ist:

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{|c} \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}.$$

### 2.1.2 Anlegeregeln

**Definition 2.11.** Wir bezeichnen das Paar  $(A, \psi_A)$  aus einer (Proto-)Kachel  $A$  und einer Abbildung  $\psi_A$ , die jeder Ecke der (Proto-)Kachel  $A$  eine Farbe zuordnet, als *markierte Kachel* bzw. *markierte Protokachel*.

**Beispiel 2.12.** Ein einfaches Beispiel für eine Protokachelmengung, die aus einer markierten Protokachel besteht, ist

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{|c} \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}.$$

**Definition 2.13.** Eine Kachel heißt *Kopie einer markierten Protokachel*, wenn sie zu dieser markierten Protokachel isomorph ist, das heißt, wenn sie kongruent sind und ihre Markierungen übereinstimmen.

Für den folgenden zentralen Begriff übernehmen wir die Terminologie von [Beh12, Abschn. 2.2]:

**Definition 2.14.** Als *Anlegeregeln* bezeichnen wir die Forderung, dass die Markierungen von markierten Kacheln zur Deckung kommen, das heißt, für zwei Kacheln  $A$  und  $B$  mit gemeinsamer Eckenmenge  $V$  gilt  $\psi_A(v) = \psi_B(v)$  für alle  $v \in V$ .

**Beispiel 2.15.** Die Euklidische Ebene kann mit der Protokachelmenge aus Beispiel 2.12 ausgelegt werden:

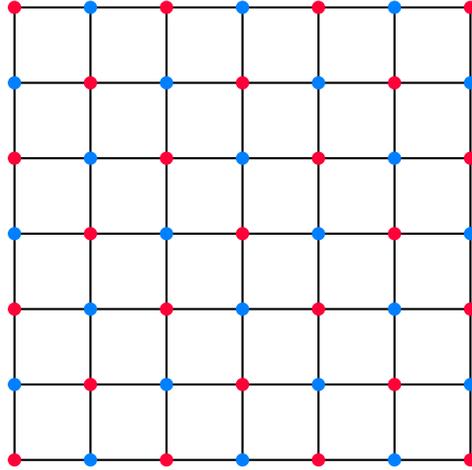


Abbildung 2.3: Einfache (Teil-)Parkettierung von  $\mathbb{E}$  mit markierten Quadraten

*Bemerkung 2.16.* Die Anlegeregeln legen also fest, wie die Kopien von markierten Protokacheln aneinandergelegt werden dürfen und können die Möglichkeiten dabei einschränken. Wenn die Markierungen von markierten Kacheln zur Deckung kommen müssen, dann bedeutet das auch, dass eine Markierung nur auf eine Markierung gelegt werden darf, und nicht auf eine unmarkierte Stelle am Rand der Kachel. Demnach dürfen auch nur Kanten aneinandergelegt werden, die die gleiche Länge haben.

### 2.1.3 Periodizität und Aperiodizität

**Definition 2.17** (angelehnt an [Lam05, Abschn. 1]). Sei  $\mathcal{T}$  eine Parkettierung der Ebene  $\mathbb{E}$  und  $c \in \mathbb{E} \setminus \{(0, 0)\}$  ein fest gewählter Verschiebungsvektor. Unter einer *Translationssymmetrie* der Parkettierung  $\mathcal{T}$  verstehen wir eine Verschiebungsabbildung  $\psi_c : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  mit  $\psi_c(x) := x + c$ , unter der die Parkettierung mit sich selbst zur Deckung kommt.

**Definition 2.18** ([Rit14, Abschn. 1.5]). Eine Parkettierung heißt *periodisch*, wenn sie zwei Translationssymmetrien in zwei nicht-parallele Richtungen aufweist.

Eine Parkettierung heißt *nicht periodisch*, wenn sie weniger als zwei Translationssymmetrien in zwei nicht-parallele Richtungen aufweist. Eine Parkettierung heißt *nicht-periodisch*, wenn sie keine Translationssymmetrie aufweist.

**Beispiel 2.19.** Die Parkettierung aus Beispiel 2.6 ist mit den eingezeichneten Verschiebungsvektoren periodisch:

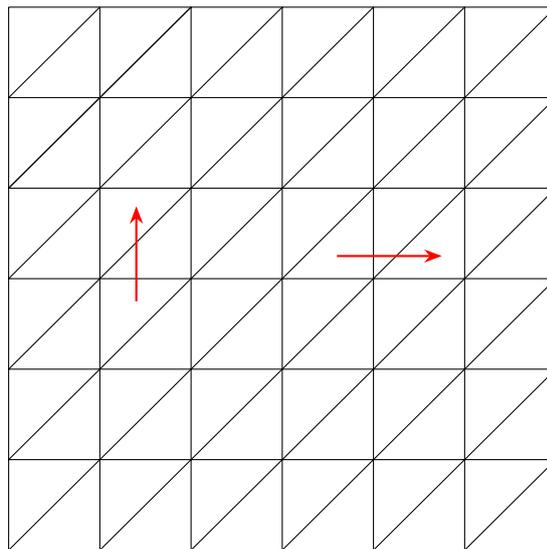


Abbildung 2.4: Einfache periodische (Teil-)Parkettierung von  $\mathbb{E}$  mit Dreiecken

**Definition 2.20** ([Rit14, Abschn. 1.5]). Eine Menge von Protokacheln  $\mathcal{F}$  heißt *aperiodisch*, wenn jede Parkettierung der Ebene, die aus Kopien der Kacheln aus  $\mathcal{F}$  besteht, immer nicht-periodisch ist.

*Bemerkung 2.21.* Das bedeutet, dass in einer aperiodischen Parkettierung, unabhängig davon wie diese aussieht, niemals eine Translationssymmetrie auftritt.

**Beispiel 2.22.** Wenn wir die Parkettierung aus Beispiel 2.6 wie in der Abbildung 2.5 modifizieren, so erhalten wir eine nicht-periodische Parkettierung, da keine Translationssymmetrie mehr vorhanden ist. Da allerdings die Protokachelmenge weiterhin

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \diagdown \end{array} \right\}$$

ist, und es möglich ist, damit eine periodische Parkettierung zu legen (wie wir in Beispiel 2.19 gesehen haben), ist die Protokachelmenge  $\mathcal{F}$  nicht aperiodisch.

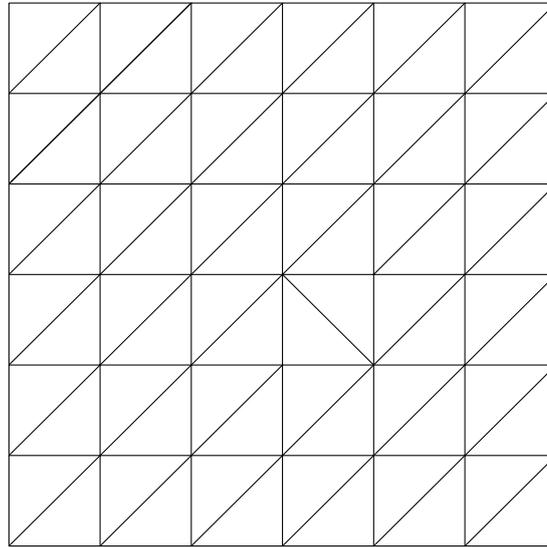


Abbildung 2.5: Einfache nicht-periodische (Teil-)Parkettierung von  $\mathbb{E}$  mit Dreiecken

Wir werden sehen, dass Anlegeregeln und damit markierte Protokacheln einen entscheidenden Unterschied machen zwischen einer periodischen und einer aperiodischen Parkettierung.

## 2.2 Die Protokacheln: Der Drachen $K$ und der Pfeil $D$

### 2.2.1 Einführung von Drachen und Pfeil

In dieser Arbeit wird die Penrose-Parkettierung mit den markierten Protokacheln *Drachen*, genannt  $K$  für „Kite“, und *Pfeil*, genannt  $D$  für „Dart“, untersucht (die Protokacheln werden mit den englischen Anfangsbuchstaben abgekürzt, um mit der Notation der englischen Literatur konsistent zu bleiben, die auf diesem Gebiet vorherrschend ist). Die Parkettierung bestehend aus den markierten Protokacheln  $\{K, D\}$  ist in der Literatur unter dem Namen „P2“ [GS16, S. 539] bekannt.

Die markierten Protokacheln  $K$  und  $D$  sind von der Form wie in den Abbildungen 2.6 und 2.7, wobei der Winkel  $\alpha := 36^\circ$  definiert ist:

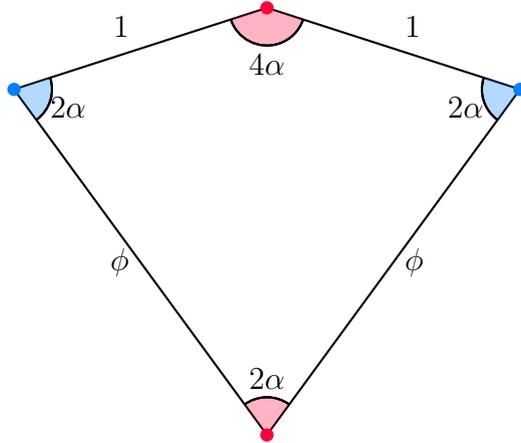


Abbildung 2.6: Drachen  $K$

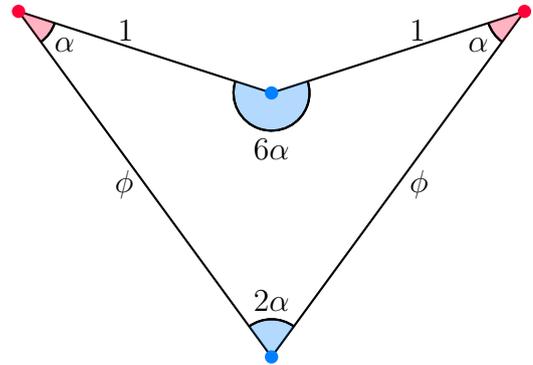


Abbildung 2.7: Pfeil  $D$

Die kürzere Seite der beiden Protokacheln ist auf die Länge 1 normiert, die längere Seite hat die Länge  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Diese Zahl wird Goldener Schnitt genannt und ist die positive Lösung der Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$ . Für diese Arbeit halten wir uns an die gängige Notation [BP95, Abschn. 1.1, S. 18]  $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\dots$  und  $\frac{1}{\phi} := \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803\dots$

Da  $\alpha = 36^\circ$  festgelegt ist, ist jeder Winkel der beiden Protokacheln ein Vielfaches von  $\alpha$ .

Um mit der Menge  $\{K, D\}$  eine aperiodische Parkettierung zu erhalten, müssen zusätzlich *Anlegeregeln* gefordert werden. In den Abbildungen 2.6 und 2.7 werden diese durch die farblich markierten Ecken dargestellt. Kopien der markierten Protokacheln dürfen nur derart aneinandergelegt werden, dass die Länge der aufeinandertreffenden Kanten und insbesondere die Farbe der aufeinandertreffenden Ecken übereinstimmt. Wenn mehr als zwei Kopien der markierten Protokacheln in einem Punkt zusammentreffen, müssen all diese Ecken dieselbe Farbe aufweisen, um eine zugelassene Penrose-Parkettierung zu sein. Ansonsten wäre es möglich, mit diesen Protokacheln ein Parallelogramm (genauer sogar eine Raute der Seitenlänge  $\phi$ ) zu legen, das Translationsinvarianzen in zwei nicht-parallele Richtungen aufweisen würde; die Parkettierung wäre somit periodisch (vgl. Definition 2.18). Die

Anlegeregeln, die wir fordern, um die Menge von Protokacheln  $\{K, D\}$  zu erlangen, verhindern gerade das.

### 2.2.2 Kleinflächige Teilparkettierungen der Ebene mit Drachen und Pfeil

Da wir nun die Form der Protokacheln kennen und wissen, wie diese aneinander gelegt werden dürfen, stellt sich die Frage, wie Parkettierungen oder zumindest Teilparkettierungen mit Drachen und Pfeil aussehen. Die Frage nach den Teilparkettierungen können wir an dieser Stelle bereits mit dem folgenden Satz beantworten:

**Satz 2.23** ([Gar89, S. 10], [Rit14, Abschn. 9.1]). *Es gibt genau sieben Möglichkeiten, die Protokacheln  $K$  und  $D$  um einen Eckpunkt anzuordnen:*

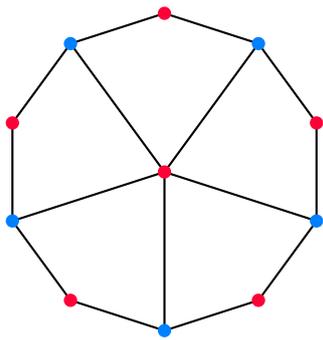


Abbildung 2.8: Sonne

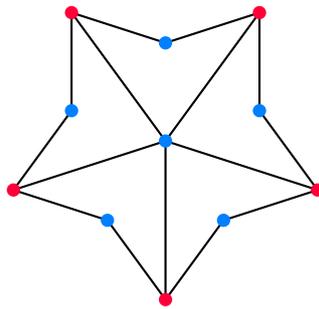


Abbildung 2.9: Stern

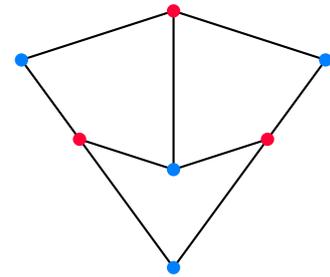


Abbildung 2.10: Ass

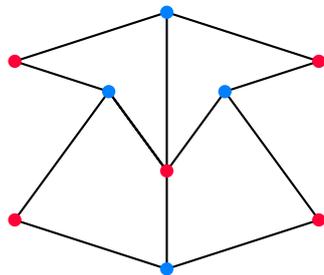


Abbildung 2.11: Teufel

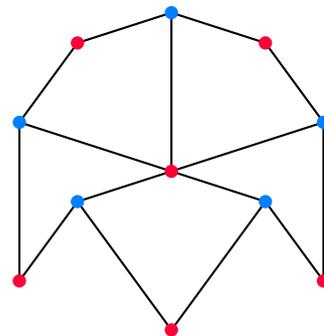


Abbildung 2.12: Bube

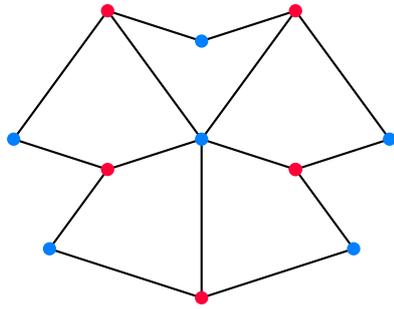


Abbildung 2.13: Königin

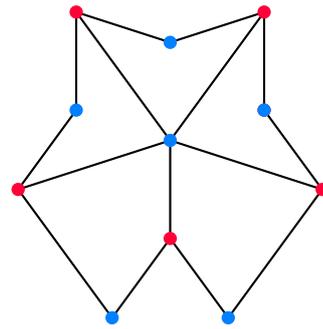


Abbildung 2.14: König

Die Benennung der sieben Ausschnitte geht auf John Conway zurück [Gar89, S. 10].

*Beweis.* Dieser Beweis beruht einerseits auf den festgelegten Anlegeregeln – aufeinander treffende Kantenlängen müssen übereinstimmen und aufeinander treffende Ecken müssen in der gleichen Farbe markiert sein – und andererseits auf der Überlegung, dass ein Vollwinkel  $360^\circ$  hat und an einem Punkt, an dem mehrere Kacheln zusammentreffen, die Summe ihrer Winkel dann genau  $360^\circ$  sein muss, um eine Kreisscheibe um diesen Punkt vollständig zu überdecken.

Wir wissen, dass in den Protokacheln genau die Winkel  $\alpha$ ,  $2\alpha =: \beta$ ,  $4\alpha =: \gamma$  und  $6\alpha =: \delta$  auftauchen, wobei  $\alpha = 36^\circ$ . Dadurch ergibt sich aufgrund der Vollwinkelbedingung das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\lambda_1 \cdot \alpha + \lambda_2 \cdot \beta + \lambda_3 \cdot \gamma + \lambda_4 \cdot \delta = 360^\circ \text{ wobei } \lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{N}.$$

Wir ermitteln für dieses System die Lösungen in den natürlichen Zahlen<sup>1</sup> und überprüfen dann für diese Fälle, ob eine Parkettierung aufgrund der Anlegeregeln möglich ist. Die Lösungen in  $\mathbb{N}$  sind die folgenden Tupel  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ :

1.	$(0, 0, 1, 1)$	6.	$(6, 0, 1, 0)$	11.	$(0, 5, 0, 0)$
2.	$(4, 0, 0, 1)$	7.	$(4, 1, 1, 0)$	12.	$(2, 4, 0, 0)$
3.	$(2, 1, 0, 1)$	8.	$(0, 3, 1, 0)$	13.	$(4, 3, 0, 0)$
4.	$(0, 2, 0, 1)$	9.	$(2, 2, 1, 0)$	14.	$(8, 1, 0, 0)$
5.	$(2, 0, 2, 0)$	10.	$(6, 2, 0, 0)$	15.	$(10, 0, 0, 0)$

<sup>1</sup>Wir fassen die Menge der natürlichen Zahlen auf als  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Für den weiteren Verlauf des Beweises seien die Kacheln wie in der folgenden Abbildung beschriftet:

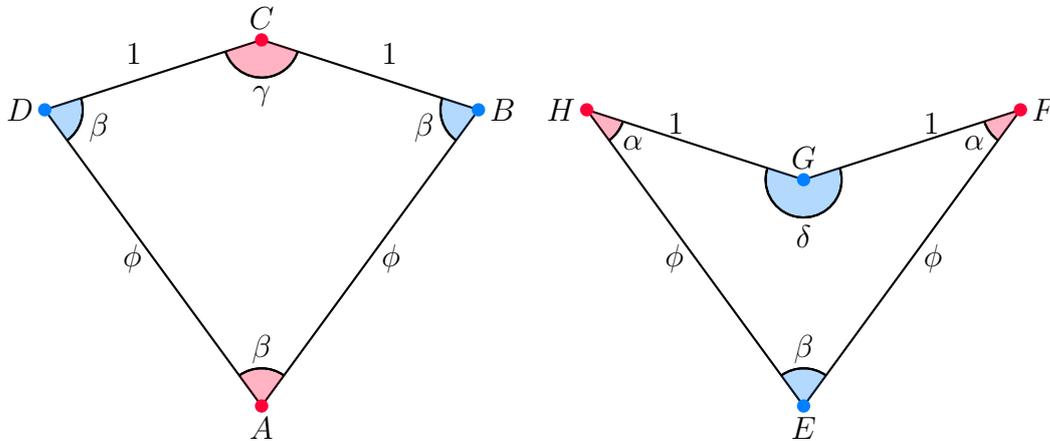


Abbildung 2.15: Beschriftete Protokacheln für den Verlauf des Beweises

Wir gehen nun diese Fälle einzeln durch:

1. Die Lösung  $(0, 0, 1, 1)$  bedeutet, dass die Punkte  $C$  und  $G$  aneinandergelagt werden. Das ist aufgrund der farblichen Anlegeregeln nicht möglich.
2.  $(4, 0, 0, 1)$ : Diese Winkelkombination kann aufgrund der Anlegeregeln nicht gelegt werden, da an den Punkt  $G$  einer der Punkt  $H$  oder  $F$  gelegt werden müsste. Das ist aufgrund der farblichen Anlegeregeln nicht möglich.
3.  $(2, 1, 0, 1)$ : An den Punkt  $G$  kann entweder  $B$  oder  $D$  angelegt werden, das heißt  $\beta$  kann an  $\delta$  angelegt werden. Allerdings gibt es dann aufgrund der farblichen Anlegeregeln keine weitere Möglichkeit, an den Punkt  $G$  einen Winkel  $\alpha$ , das heißt  $F$  oder  $H$ , anzulegen. Direkt einen Winkel  $\alpha$  in  $G$  anzulegen ist analog zu 2. nicht möglich.
4.  $(0, 2, 0, 1)$ : An den Punkt  $G$  kann der Punkt  $E$  aufgrund der unterschiedlichen Kantenlänge nicht angelegt werden. Es können jedoch – als einzig andere Möglichkeit – die Punkte  $B$  und  $D$  so angelegt werden, dass  $C$  einmal auf  $F$  und einmal auf  $D$  trifft. Damit ist um den Eckpunkt  $G$  ein  $360^\circ$ -Winkel gelegt. Die entstandene Teilparkettierung wird **Ass** genannt (Abbildung 2.10).

5.  $(2, 0, 2, 0)$ : Um zweimal den Winkel  $\gamma$  an einem Eckpunkt zu legen, legen wir den Punkt  $C$  auf sich selbst derart, dass  $B$  und  $D$  aufeinander liegen. Eine andere Möglichkeit hierfür gibt es nicht. Um dann noch zwei Winkel  $\alpha$  anzulegen, müssen die Punkte  $F$  und  $H$  auf  $C$  gelegt werden, sodass  $G$  einmal auf  $B$  und einmal auf  $D$  zu liegen kommt (eine andere Möglichkeit gibt es aufgrund der Längen nicht). Dadurch entsteht im Punkt  $C$  ein Vollwinkel und die entstandene Teilparkettierung wird **Teufel** genannt (Abbildung 2.11).
6.  $(6, 0, 1, 0)$ : An  $C$  kann der Pfeil jeweils einmal so angelegt werden, dass  $F$  und  $H$  an  $C$  anliegen und dadurch die Seiten der Länge 1. Dann kann an diese Pfeile jeweils an die Seite der Länge  $\phi$  ein weiterer Pfeil gelegt werden, sodass auf den Punkt  $F$  der Punkt  $H$  zu liegen kommt und umgekehrt. Die Lücke, die dann zwischen den Kacheln entsteht, kann allerdings von keiner Kachel geschlossen werden.
7.  $(4, 1, 1, 0)$ : An den Winkel  $\gamma$  in  $C$  können aufgrund der Anlegeregeln wegen Längen und Farben keine Winkel  $\beta$  unmittelbar angelegt werden. Es können allerdings, wie in 6., zuerst zwei Pfeile so angelegt werden, dass jeweils  $F$  und  $G$  auf  $C$  liegen. Wir legen einen Drachen so an, dass  $A$  auf  $C$  und  $D$  auf  $E$  liegt. Dann kann kein Pfeil mehr mit  $F$  oder  $H$  angelegt werden.
8.  $(0, 3, 1, 0)$ : An  $C$  müssten die Punkte  $A, B, D$  oder  $E$  angelegt werden. Die Punkte  $B, D$  und  $E$  können aufgrund der Farbgebung nicht angelegt werden, und der Punkt  $A$  nicht, da die Kantenlängen nicht übereinstimmen.
9.  $(2, 2, 1, 0)$ : Wie in 7. erklärt, müssen an  $C$  zuerst zwei Pfeile gelegt werden, sodass  $F$  und  $H$  auf  $C$  liegen. Die einzige Möglichkeit aufgrund der farblichen Anlegeregeln ist es, an dieser Stelle zwei Drachen so anzulegen, dass  $A$  beide Male auf  $C$  liegt. Der Vollwinkel ist nun geschlossen und die entstandene Teilparkettierung wird **Bube** genannt (Abbildung 2.12).
10.  $(6, 2, 0, 0)$ : Da  $\alpha$  nur an den rot markierten Punkten  $F$  und  $H$  auftaucht, müssen wir  $A$  als Eckpunkt wählen. Je ein Pfeil kann links und rechts so angelegt werden, dass  $F$  und  $H$  auf  $A$  liegen. Dann kann aufgrund der

Kantenlängen aber keine der geforderten weiteren Winkel mit passender Farbe und Länge angelegt werden. Diese Argumentation gilt auch, wenn zwischen den Drachen zu Beginn und einen der Pfeile ein weiterer Drachen gelegt wird.

11.  $(0, 5, 0, 0)$ : Wir haben folgende Möglichkeiten, dies zu erfüllen:

- Um den Punkt  $A$  fünf Drachen so anordnen, dass jeweils immer  $A$  auf  $A$  liegt. Das ergibt einen Vollwinkel und die Teilparkettierung wird **Sonne** genannt (Abbildung 2.8).
- Um den Punkt  $E$  fünf Pfeile so anordnen, sodass jeweils immer  $E$  auf  $E$  liegt. Das ergibt einen Vollwinkel und die Teilparkettierung wird **Stern** genannt (Abbildung 2.9).
- Wir wählen den Punkt  $B$  des Drachen als Eckpunkt und legen einen weiteren Drachen so an, dass  $D$  auf  $B$  und  $A$  auf  $A$  liegt. Dann legen wir einen weiteren Drachen so an, dass  $D$  auf  $B$  und  $C$  auf  $C$  liegt. An diese Kachel wird ein Pfeil so angelegt, dass  $E$  auf  $B$  liegt und  $H$  auf  $A$ . In die Lücke kann ein weiterer Drachen gelegt werden. So entsteht ein Vollwinkel und diese Teilparkettierung wird **Königin** genannt (Abbildung 2.13).
- Wir wählen den Punkt  $D$  des Drachen als Eckpunkt und legen einen Drachen so an, dass  $B$  auf  $D$  und  $C$  auf  $C$  liegt. Dann legen wir Pfeile so an, dass  $E$  jeweils auf  $D$  liegt. Damit liegt ein Vollwinkel vor und diese Teilparkettierung wird **König** genannt (Abbildung 2.14).

Wir überprüfen noch, ob es weitere Möglichkeiten gibt: Als mögliche Eckpunkte können wir  $A$ ,  $B$ ,  $D$  oder  $E$  wählen. Für  $A$  gibt es aufgrund der farblichen Anlegeregeln keine andere Möglichkeit als die Sonne. Wenn an  $E$  kein weiterer Pfeil gelegt wird, sondern ein Drachen, sodass  $B$  oder  $D$  auf  $E$  liegt, dann muss aufgrund der Längen ein weiterer Drachen mit  $D$  oder  $B$  angelegt werden. Aufgrund der farblichen Anlegeregeln müssen dann zwei Pfeile angelegt werden, dadurch entsteht die Königs-Teilparkettierung. Für die Punkte  $B$  und  $D$  ist eine andere Reihenfolge als die hier vorgestellte möglich, allerdings können wegen der Längen und farblichen Markierungen nur diese beiden Teilparkettierungen entstehen.

12.  $(2, 4, 0, 0)$ : Der einzig mögliche Eckpunkt ist  $A$ , denn  $\alpha$  taucht nur bei den rot markierten Ecken  $F$  und  $H$  auf. Also können vier Drachen wie bei der Sonne um  $A$  angeordnet werden und ein Pfeil kann so angelegt werden, dass ohne Einschränkung  $F$  auf  $A$  und  $E$  auf  $B$  liegt. Allerdings kann dann kein zweiter Drachen mehr angelegt werden, da die entstandene Lücke nicht zu füllen ist.
13.  $(4, 3, 0, 0)$ : Analog zu 12 müssen um  $A$  drei Drachen angeordnet werden. An die beiden äußeren kann dann auch jeweils ein Pfeil so angelegt werden, dass  $F$  auf  $A$  liegt, allerdings kann die entstandene Lücke nicht geschlossen werden.
14.  $(8, 1, 0, 0)$ : Analog zu 12 und 13 müssen wir  $A$  als Eckpunkt wählen. Dann kann je ein Pfeil so angelegt werden, dass  $F$  bzw.  $H$  auf  $A$  liegt. Aufgrund der Längen kann kein weiterer Pfeil mehr angelegt werden.
15.  $(10, 0, 0, 0)$ : Wir wählen ohne Einschränkung  $F$  als Eckpunkt. Dann kann ein weiterer Pfeil so angelegt werden, dass  $H$  auf  $F$  liegt. Aufgrund der Längen kann kein weiterer Pfeil mehr angelegt werden.

Wir haben damit genau die sieben Teilparkettierungen aus dem Satz gefunden und gezeigt, dass es keine anderen Möglichkeiten der Anordnung um einen Eckpunkt gibt.  $\square$

Nun wissen wir, dass zumindest Teilparkettierungen mit den markierten Protokacheln  $K$  und  $D$  möglich sind. Wir zeigen im nächsten Kapitel in Satz 3.10, dass die Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil auf der Euklidischen Ebene existiert. Für diesen Beweis benötigen wir einen Algorithmus, der im nächsten Abschnitt eingeführt und bewiesen wird. Bevor wir uns mit diesem Algorithmus beschäftigen, untersuchen wir noch den Zusammenhang zwischen den Protokacheln und dem regelmäßigen Fünfeck.

### 2.2.3 Beziehung der Kacheln zum regulären Fünfeck

Die beiden Protokacheln Drachen und Pfeil weisen eine enge Verbindung zum regelmäßigen Fünfeck auf, denn sie können aus diesem konstruiert werden [BP95, Abschn. 5.9, S. 81]. Dazu geht man vor wie in Abbildung 2.16: Man zeichnet alle Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks. Dadurch entsteht in der Mitte ein kleineres

Fünfeck. Bei diesem zeichnet man eine Diagonale ein und erhält so die beiden Protokacheln  $K$  und  $D$ .

Aufgrund dieser engen Verbindung spielt auch der Goldene Schnitt  $\phi$  eine so bedeutende Rolle für die Protokacheln. Nach [BP95, Kap. 2, S. 31] ist das regelmäßige Fünfeck „das wichtigste mathematische Objekt, das im Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt steht“, denn im regulären Fünfeck teilen die Diagonalen sich im Verhältnis des goldenen Schnittes. So entsteht nach der Konstruktion der Protokacheln  $K$  und  $D$  die Seite mit Länge  $\phi$ .

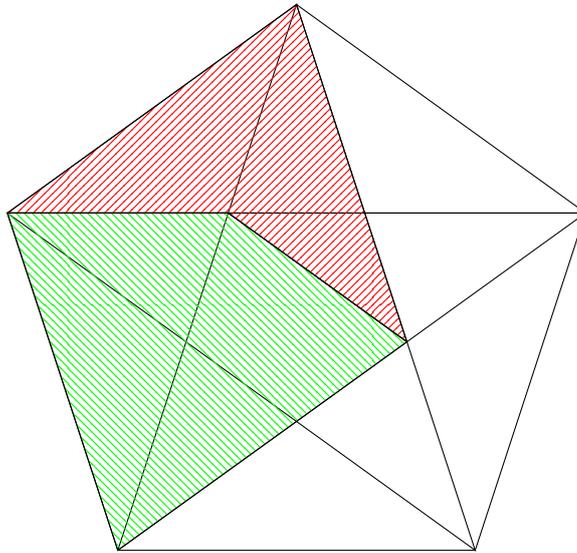


Abbildung 2.16: Konstruktion von Drachen und Pfeil im regelmäßigen Fünfeck

## 2.3 Größere Teilparkettierungen mit Drachen und Pfeil

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, wie aus Drachen und Pfeil eine Teilparkettierung gelegt werden kann, deren Flächeninhalt größer ist als der Flächeninhalt einer Anordnung um einen Eckpunkt (wenn wir im Folgenden von „größer“ oder „kleiner“ sprechen, so meinen wir dies bezogen auf den üblichen Flächeninhalt in der Euklidischen Ebene). Dadurch nähern wir uns der Frage an, ob

und wie eine Parkettierung mit Drachen und Pfeil auf der Ebene  $\mathbb{E}$  gelegt werden kann.

Um diese Frage zu beantworten, werden wir im nächsten Unterabschnitt einen Algorithmus, die Komposition, und seine Umkehrung, die Dekomposition, genauer untersuchen. Beide Algorithmen können jeweils noch mit einer Reskalierung um den Faktor  $\phi$  verkettet werden, was vor allem bei der Dekomposition eine große Rolle spielen wird – dies bezeichnen wir dann als Inflation.

Im Verlauf dieses Abschnittes benötigen wir eine Verschärfung der Begriffe *Markierungen* (Definition 2.11) und *Anlegeregeln* (Definition 2.14). Die Abbildung  $\psi_A$  aus Definition 2.11 soll optional noch einer Kante der Kachel  $A$  einen „halben Pfeil“ zuordnen können, sodass diese Kante in einer Verschärfung der Definition 2.14 nur derart an eine andere Kante gelegt werden darf, dass sich der Markierungsfeil vervollständigt.

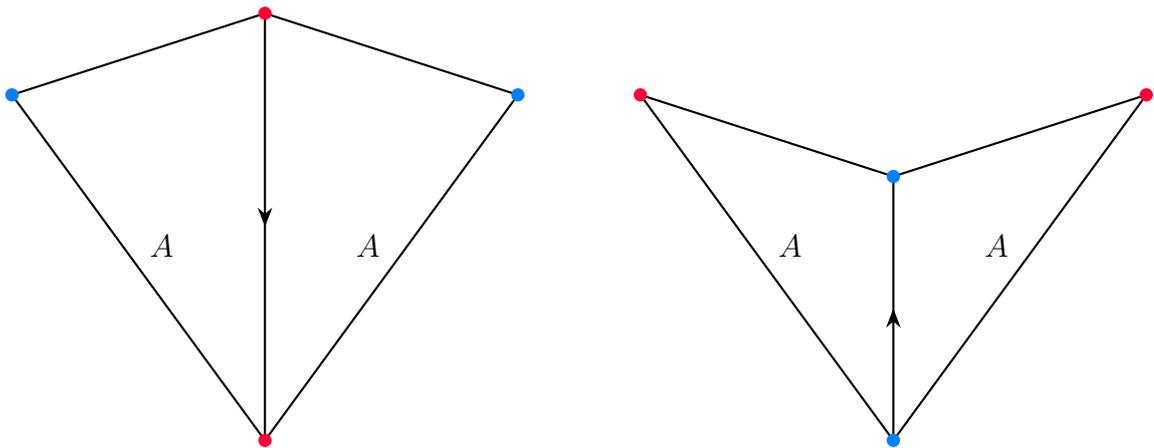


Abbildung 2.17: Verschärfte Anlegeregeln

### 2.3.1 Komposition und Dekomposition, Inflation und Deflation

Wir beginnen mit der Komposition. Dieser Algorithmus besteht aus vier benannten Teilschritten: 1. dem Teilungstrick, 2. dem Kompositionstrick 1, 3. dem Kompo-

sitionstrick 2 und schließlich 4. der Komposition. Bei diesem Verfahren – und dementsprechend auch beim Umkehrprozess Dekomposition – werden die markierten Kacheln  $K$  und  $D$  derart modifiziert, dass neue markierte Kacheln entstehen. Da aus Kacheln, aus denen eine Parkettierung gelegt wird, eine Menge von Protokacheln abgeleitet werden kann, entsteht somit eine neue Menge von markierten Protokacheln. Diese modifizierten Kacheln bzw. Protokacheln sind ähnlich zu den ursprünglichen Protokacheln, genauer sind sie um den Faktor  $\phi$  größer. Sie werden daher mit  $\phi K$  und  $\phi D$  bezeichnet. Um diese Modifikation der Kacheln durchzuführen, werden während des Algorithmus weitere markierte Protokacheln entstehen mit den Bezeichnungen  $\triangle A, \triangle B, \phi A', \phi B', \triangle \phi A$  und  $\triangle \phi B$ .

Zusammengefasst passiert bei diesem Algorithmus Folgendes: Die Protokacheln  $K$  und  $D$  (und somit auch die Kopien der Kacheln) werden um den Faktor  $\phi$  vergrößert und die Anzahl der Kacheln, mit denen parkettiert wird, verringert sich. Die parkettierte Fläche behält ihre Größe nahezu bei. Komposition als gesamtes bedeutet folglich: von  $K$  zu  $\phi K$ , von  $D$  zu  $\phi D$ .

Wir legen diesen Algorithmus im Detail dar und betrachten dazu parallel ein Beispiel zum besseren Verständnis. Wir wenden den Kompositionsalgorithmus auf die partielle Parkettierung mit den Protokacheln  $K$  und  $D$  in Abbildung 2.18 an.

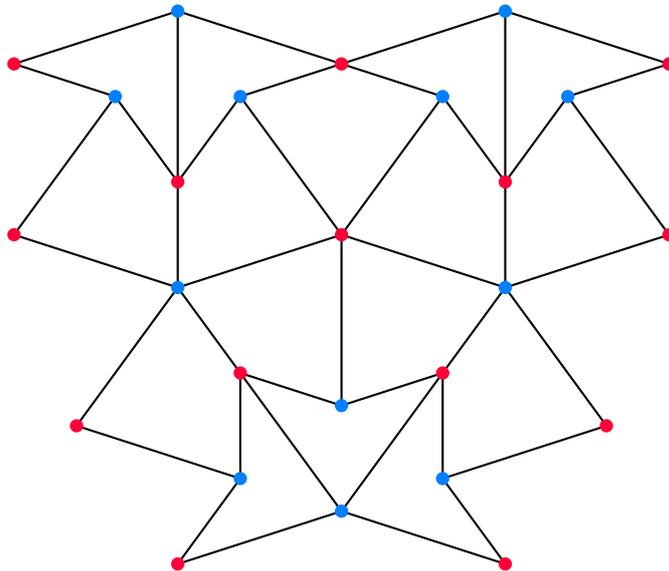


Abbildung 2.18: Ausschnitt vor Anwendung der Komposition

**Algorithmus 2.24** (Komposition [Rit14, Abschn. 4.1-4.4]).

1. **Teilungstrick: von  $K$  zu  $\Delta A$ , von  $D$  zu  $\Delta B$**

Beide Protokacheln  $K$  und  $D$  besitzen genau eine Symmetrieachse. Die Kopien der Kacheln werden entlang dieser Symmetrieachse geteilt. So entstehen zwei neue Protokacheln, die beide gleichschenklige Dreiecke sind: Aus der Protokachel  $K$  entstehen zwei Dreiecke  $\Delta A$  und aus der Protokachel  $D$  entstehen zwei Dreiecke  $\Delta B$ . Die Markierungen der Anlegeregeln von  $K$  und  $D$  werden auf die Kacheln  $\Delta A$  und  $\Delta B$  übertragen, sodass diese markierte Kacheln sind. Auf der Symmetrieachse wird eine neue, eindeutige Markierung eingeführt: Eine Pfeilspitze, die auf die Spitze des Dreiecks zeigt (somit liegt diese Markierung auf der Seite des Dreiecks, die die gleichen Eckmarkierungen aufweist). Es entsteht eine neue Menge von markierten Protokacheln:  $\{\Delta A, \Delta B\}$ .

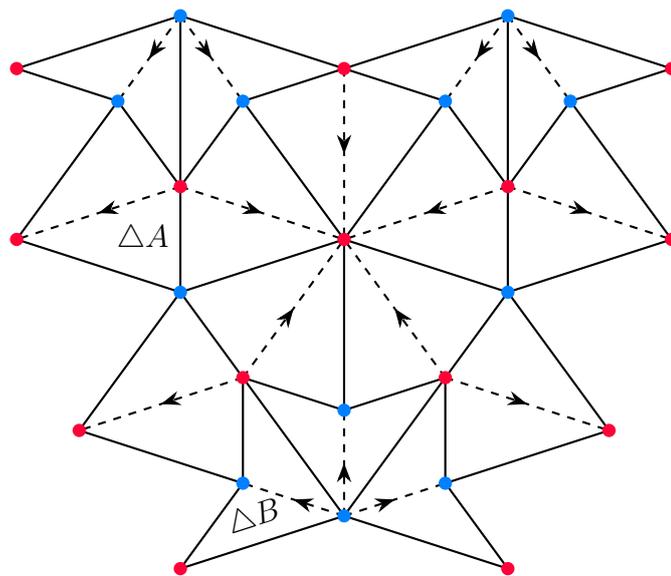


Abbildung 2.19: Ausschnitt nach Anwendung des Teilungstricks

2. **Kompositionstrick 1: von  $\Delta A$  und  $\Delta B$  zu  $\Delta A$  und  $\phi B'$**

Jede Kachel  $\Delta B$  liegt an einer ihrer kurzen Seiten an einer Kachel  $\Delta A$ . Die beiden Kacheln werden zu einer neuen Kachel  $\phi B'$  zusammengefasst (dadurch entsteht eine neue markierte Protokachel). Diese ist ähnlich zur Kachel  $\Delta B$ . Es

werden alle Markierungen invertiert, die von dem Zusammenfügen betroffen sind (das heißt rot wird zu blau und umgekehrt, betroffene Markierungspfeile ändern die Richtung). Wir sehen in Abbildung 2.20, dass Markierungen eingezeichnet sind, die sowohl rot als auch blau sind. Wenn an einem Eckpunkt sowohl ein neu konstruiertes  $\phi B'$  als auch ein  $\Delta A$  aneinandergrenzen, zeigt diese gemischte Markierung an, dass sie wegen  $\phi B'$  einerseits invertiert werden muss und andererseits wegen  $\Delta A$  ihre Farbe beibehalten muss.

In diesem Schritt verschwinden<sup>2</sup> alle Kacheln  $\Delta B$  und wir arbeiten mit der Protokachelmenge  $\{\Delta A, \phi B'\}$  weiter.

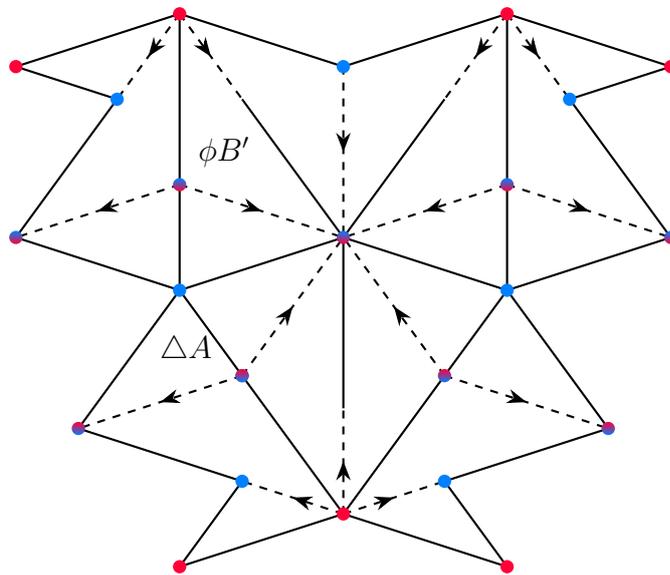


Abbildung 2.20: Ausschnitt nach Anwendung des Kompositionstricks 1

### 3. Kompositionstrick 2: von $\Delta A$ und $\phi B'$ zu $\phi A'$ und $\phi B'$

Jede Kachel  $\Delta A$  liegt mit einer ihrer langen Seiten an einer Kachel  $\phi B'$ . Diese beiden Kacheln werden zusammengefügt, sodass eine neue markierte Kachel  $\phi A'$  entsteht (und damit auch eine neue markierte Protokachel). Es werden, wie beim

<sup>2</sup>Da wir beim Zeichnen nur endliche Ausschnitte betrachten können, bleiben bei der Durchführung dieses Schrittes immer Kacheln übrig. Wir zeigen in Satz 3.10, dass die Parkettierung auf der Euklidischen Ebene existiert. Für diese unendliche Parkettierung verschwinden in diesem Schritt tatsächlich alle Kacheln  $\Delta B$ .

Kompositionstrick 1, alle betroffenen Markierungen invertiert. Wenn an einem Eckpunkt zwei verschiedenfarbige Markierungen vorliegen, legen wir fest, dass die Farbe der Kachel  $\phi B'$  dominieren soll (das heißt sie soll in diesem Schritt invertiert werden, die Farbe der Kachel  $\Delta A$  an diesem Eckpunkt soll gleich bleiben). Auf diesem Weg verschwinden alle Kacheln  $\Delta A$  und wir arbeiten mit der Protokachelmenge  $\{\phi A', \phi B'\}$  weiter.

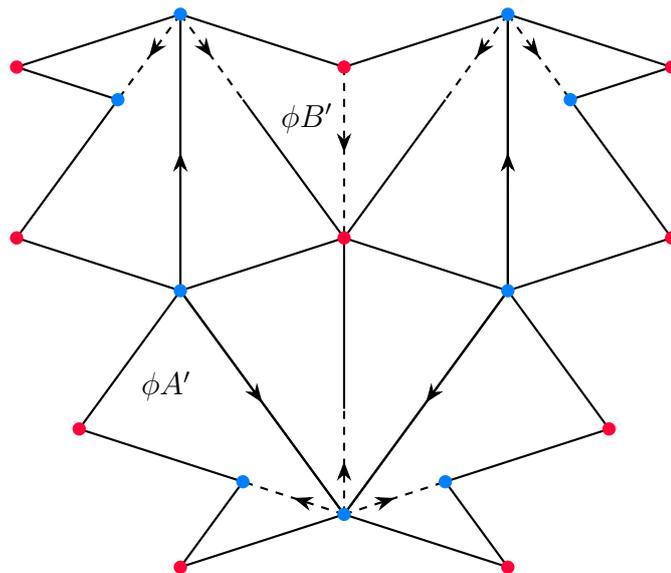


Abbildung 2.21: Ausschnitt nach Anwendung des Kompositionstricks 2

4. **Komposition: von  $\phi A'$  und  $\phi B'$  über  $\Delta \phi A$  und  $\Delta \phi B$  zu  $\phi K$  und  $\phi D$**   
 Die Markierungen von  $\phi A'$  und  $\phi B'$  werden invertiert, dadurch stimmen sie mit denen der Kacheln  $\Delta A$  und  $\Delta B$  überein. Diese neuen markierten Kacheln bezeichnen wir als  $\Delta \phi A$  und  $\Delta \phi B$ . Als nächstes werden die Kacheln  $\Delta \phi A$  und  $\Delta \phi B$  so zusammengefügt, dass Kacheln entstehen, die ähnlich sind zu  $K$  und  $D$ , aber um den Faktor  $\phi$  vergrößert. Diese neuen Protokacheln bezeichnen wir als  $\phi K$  und  $\phi D$ . Dadurch hat sich nur die Größe der Kacheln geändert, mit denen parkettiert wird, nicht aber die Größe der parkettierten Fläche.

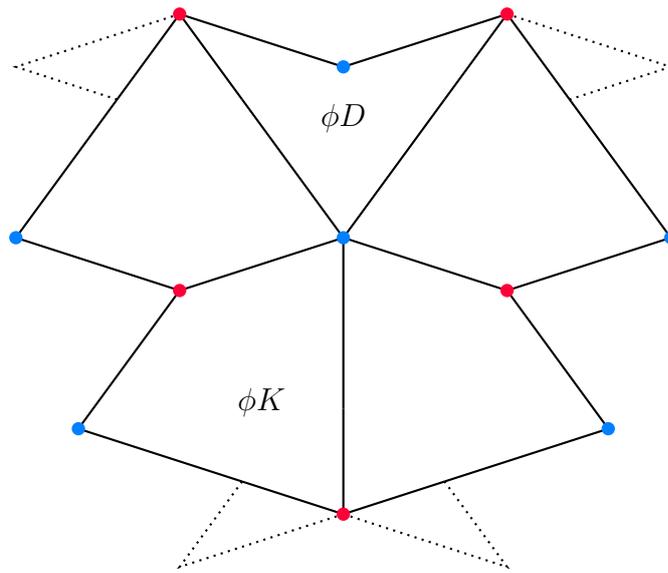


Abbildung 2.22: Ausschnitt nach Durchführung der Komposition

*Bemerkung 2.25.* Bemerkenswerterweise stellen wir im Gegensatz zur Beschreibung in [Rit14, S. 18] fest, dass bei der Komposition nicht die gleiche Fläche parkettiert wird, sondern eine etwas kleinere: Dies ist in den Abbildungen 2.18 (Parkettierung mit der Protokachelmenge  $\{K, D\}$ ) und 2.22 (Parkettierung mit der Protokachelmenge  $\{\phi K, \phi D\}$ ) zu sehen. Wir weichen daher bei der Beschreibung des Algorithmus von [Rit14] an dieser Stelle ab und beziehen uns auf [GS16, S. 542-543]. Demzufolge ist es üblich, bei der Dekomposition (die im folgenden Algorithmus 2.26 vorgestellt wird) im letzten Schritt halbe Kacheln (das heißt Kacheln vom Typ  $\triangle A$  oder  $\triangle B$ ) zu ganzen Kacheln  $K$  oder  $D$  zu vervollständigen. Zur Komposition wird an dieser Stelle keine Aussage getroffen, daher legen wir in Analogie fest, dass im letzten Schritt der Komposition Kacheln aus der Menge  $\{\triangle A, \triangle B\}$  entfernt werden, um eine Parkettierung mit der Protokachelmenge  $\{\phi K, \phi D\}$  zu erhalten. Die parkettierte Fläche wird dann entsprechend um die entfernte Menge der Kacheln kleiner.

Wenn man die Teilschritte der Komposition in umgekehrter Reihenfolge ausführt, wird dieses Verfahren als *Dekomposition* bezeichnet. Die Dekomposition beschreibt somit den Umkehrprozess der Komposition.<sup>3</sup> Das bedeutet, dass die Protokacheln  $K$  und  $D$  um den Faktor  $\phi$  verkleinert werden und die Anzahl der Kacheln, mit denen parkettiert wird, sich erhöht. Die Größe der parkettierten Fläche behält ihre Größe (nahezu) bei. Dekomposition bedeutet demnach: Von  $\phi K$  zu  $K$ , von  $\phi D$  zu  $D$ .

Dieser Prozess soll im Folgenden näher beschrieben werden und wiederum von einem Beispiel begleitet werden:

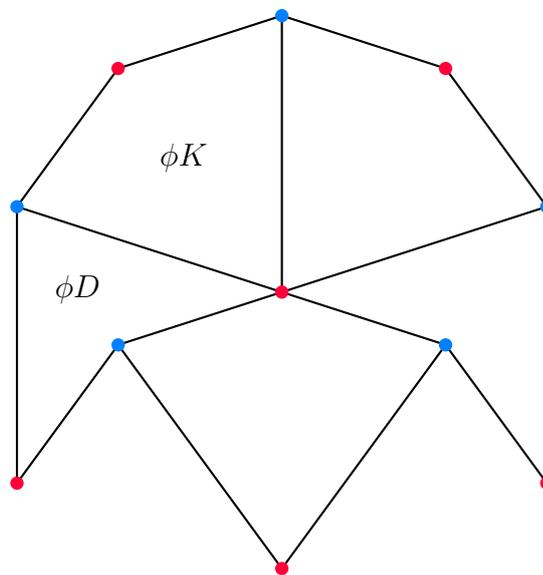


Abbildung 2.23: Ausschnitt vor Durchführung der Dekomposition

**Algorithmus 2.26** (Dekomposition [Rit14, Abschn. 4.5]).

1. Die Rückwärtsausführung des letzten Kompositionsschritts entspricht dem **Teilungstrick vorwärts**: Zeichne die Spiegelachse der Kacheln und die Pfeilmarkierungen ein, sodass die Dreiecke  $\phi A'$  und  $\phi B'$  entstehen und invertiere alle farblichen Markierungen. Die neue Protokachelmenge ist dann  $\{\phi A', \phi B'\}$ .

---

<sup>3</sup>In der Literatur (z.B. [Rit14], [GS16]) werden die Umkehrungen der einzelnen Schritte nicht weiter benannt.

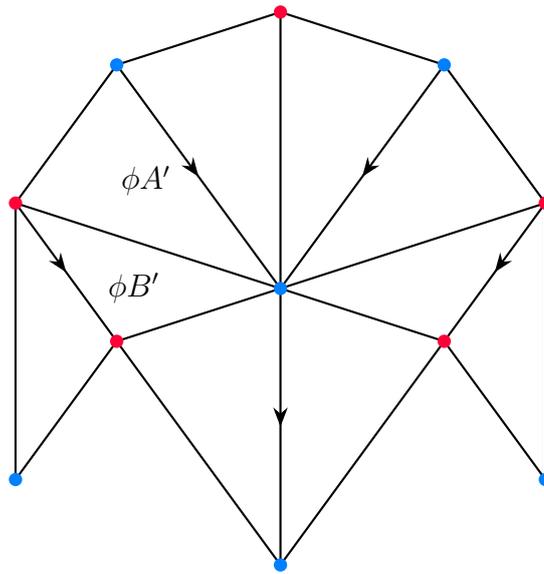


Abbildung 2.24: Ausschnitt nach Durchführung des letzten Kompositionsschritts rückwärts

2. **Kompositionstrick 2 rückwärts:** Das Ziel ist es, die Kacheln vom Typ  $\Delta A$  wiederherzustellen, die Protokachelmenge soll also  $\{\Delta A, \phi B'\}$  sein. Dazu werden alle Kacheln  $\phi A'$  so geteilt, dass je eine Kachel vom Typ  $\Delta A$  und vom Typ  $\phi B'$  entsteht.

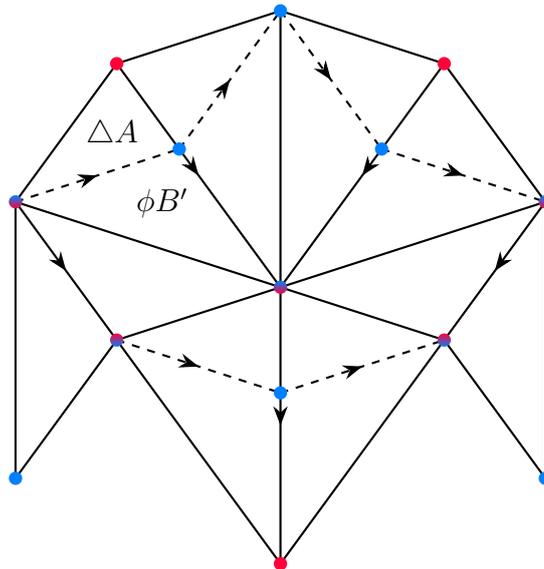


Abbildung 2.25: Ausschnitt nach Rückwärtsdurchführung des Kompositionstricks 2

Das heißt, teile die Seite des Dreiecks  $\phi A'$ , an der die Anlegeregeln übereinstimmen (das ist die im vorherigen Schritt eingezeichnete Symmetrieachse) im Verhältnis  $\phi : 1$  und verbinde diesen Punkt mit der gegenüberliegenden Dreiecksecke. Zeichne außerdem eine Pfeilspitze ein, die entgegen der Richtung der Dreiecksecke von  $\phi A'$  zeigt. Es sei festgelegt, dass die farbliche Markierung an dem neu entstandenen Punkt blau sei. Invertiere dann alle betroffenen Markierungen (das heißt die Farben der Anlegeregeln und die Richtung der Pfeilspitze). Analog zum Kompositionstrick 1 (Algorithmus 2.24, Schritt 2) erscheinen auch in diesem Beispiel gemischte Markierungen aus dem gleichen Grund, da der Ausschnitt der Parkettierung beim Kompositionstrick 1 und nach der Rückwärtsdurchführung des Kompositionstricks 2 sich im gleichen Stadium befinden.

3. **Kompositionstrick 1 rückwärts:** Das Ziel ist es, die Kacheln vom Typ  $\triangle B$  wiederherzustellen, sodass die Protokachelmenge  $\{\triangle A, \triangle B\}$  ist. Dazu werden alle Kacheln  $\phi B'$  so geteilt, dass je eine Kachel vom Typ  $\triangle A$  und vom Typ  $\triangle B$  entsteht. Teile dazu die Basis von  $\phi B'$  im Verhältnis  $\phi : 1$  und verbinde diesen Punkt mit dem neu konstruierten aus dem vorhergegangenen Schritt. Für diesen Punkt ist festgelegt, dass er die Farbe blau hat.

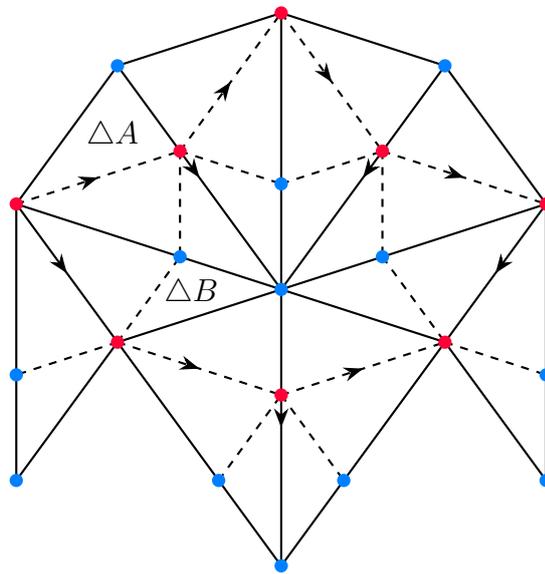


Abbildung 2.26: Ausschnitt nach Rückwärtsdurchführung des Kompositionstricks 1

Es werden wiederholt alle betroffenen Markierungen invertiert, wobei bei gemischtfarbigen Markierungen analog zum Kompositionstrick 2 (Algorithmus 2.24, Schritt 3) die Farbe der Kachel  $\phi B'$  dominieren soll, das heißt invertiert werden soll.

4. **Teilungstrick rückwärts:** In diesem Schritt entstehen die Kacheln  $K$  und  $D$ . Dazu werden je zwei Kacheln desselben Typs (also  $\triangle A$  oder  $\triangle B$ ) zusammengefasst. Durch die angebrachten Pfeilspitzen wird gewährleistet, dass die Anlegeregeln der so entstehenden Kacheln  $K$  und  $D$  nicht verletzt werden.

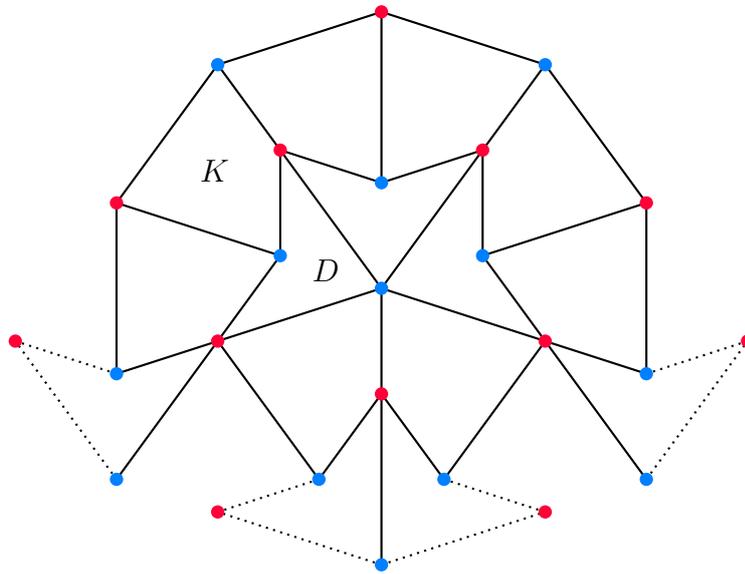


Abbildung 2.27: Ausschnitt nach Rückwärtsdurchführung des Teilungstricks

Wie in Bemerkung 2.25 dargelegt, halten wir uns an die Konvention von [GS16, 542-543], im letzten Schritt der Dekomposition verbliebene Kacheln des Typs  $\{\triangle A, \triangle B\}$  entsprechend zu Kacheln  $K$  oder  $D$  zu vervollständigen (vgl. Abbildung 2.27). Die parkettierte Fläche in dieser Abbildung ist demnach größer als die in Abbildung 2.23 vor Anwendung des Algorithmus.

Wie zu Beginn dieses Abschnitts angesprochen, bezeichnen wir die kommutative Verkettung von Dekomposition und einer Reskalierung der Kacheln mit  $\phi$  als *Inflation*.

**Algorithmus 2.27** (Inflation [Rit14, Abschn. 4.6]). Wir bezeichnen eine kommutative Verkettung aus Dekomposition und einer Vergrößerung der Kacheln um den Faktor  $\phi$  als *Inflation*, das heißt: Von  $K$  über  $\frac{1}{\phi}K$  zu  $K$ , von  $D$  über  $\frac{1}{\phi}D$  zu  $D$  und eine um  $\phi$  größere Fläche wird parkettiert.

Wir verdeutlichen im folgenden Beispiel in einem gemeinsamen Ausschnitt das Zusammenspiel von Komposition und Dekomposition.

**Beispiel 2.28.** Die folgende Abbildung 2.28 zeigt den engen Zusammenhang zwischen Komposition und Dekomposition. Wenn wir in dieser Abbildung ausschließlich die roten Linien betrachten, so liegt eine Teilparkettierung vor bestehend aus einem Ass (vgl. Satz 2.23). Wir legen fest, dass diese Protokacheln die Größe  $\phi K$  und  $\phi D$  haben. Durch Anwendung der Dekomposition auf diese Teilparkettierung erhalten wir die Teilparkettierung, die durch die gestrichelten Linien gezeigt wird mit Protokacheln der Größe  $K$  und  $D$ . Diese partielle Parkettierung wird Batman genannt [Rit14, S. 17]. Umgekehrt erhalten wir bei der Anwendung der Dekomposition auf Batman das Ass.

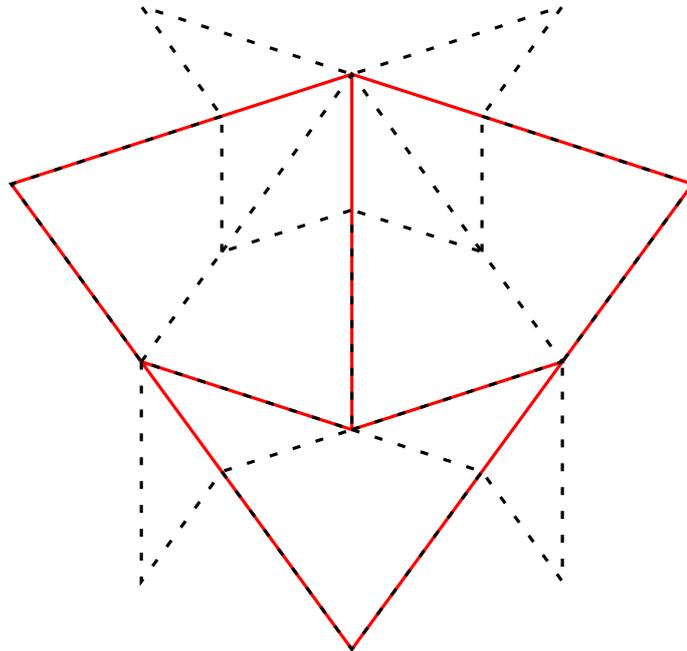


Abbildung 2.28: Dekomposition des Asses / Komposition von Batman

Um die Batman-Parkettierung zu erhalten, wurden die vier Kacheln  $\triangle B$  zu Kacheln  $D$  ergänzt und so mit den Protokacheln  $\{K, D\}$  eine größere Fläche parkettiert als mit den Protokacheln  $\{\phi K, \phi D\}$  (vgl. Bemerkung 2.25).

Ebenso wie die Dekomposition der Umkehrprozess der Komposition ist, bezeichnen wir den Umkehrprozess der Inflation als *Deflation*.

**Algorithmus 2.29** (Deflation). Wir bezeichnen als *Deflation* die kommutative Verkettung einer Verkleinerung um  $\frac{1}{\phi}$  und der Komposition. Deflation bedeutet also: von  $K$  über  $\phi K$  zu  $K$ , von  $D$  über  $\phi D$  zu  $D$ , aber eine um  $\phi$  kleinere Fläche wird parkettiert.

Dieser Prozess scheint in der Literatur keine große Rolle zu spielen (vgl. [GS16]), soll aber an dieser Stelle aus Gründen der Vollständigkeit erwähnt werden.

### 2.3.2 Zusammenfassung der Verfahren

Das folgende kommutative Diagramm gibt einen Überblick über diese Prozesse, ihre Zwischenschritte und Zusammenhänge (erstellt nach [Rit14, Abschn. 4.6]):

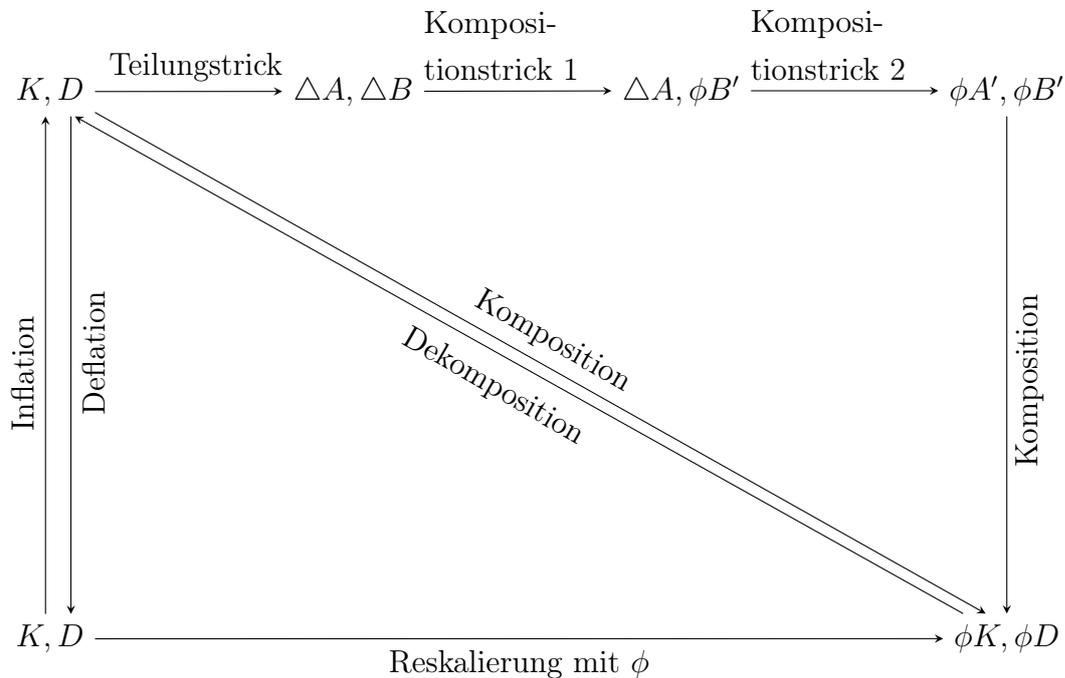


Abbildung 2.29: Zusammenfassung der Verfahren als Diagramm

Im Diagramm ist nicht sichtbar, wie sich die Größe der parkettierten Fläche verändert: Diese bleibt bei Komposition und Dekomposition nahezu konstant bis auf Ergänzungen (vgl. Bemerkung 2.25). Bei Inflation und Deflation verändert sie sich aufgrund der Reskalierung um  $\phi$  um gerade diesen Faktor.

### 2.3.3 Beweis der Verfahren

Die vorgestellten Algorithmen sollen abschließend bewiesen werden. Dazu wird die geforderte Eindeutigkeit in jedem Schritt gezeigt und dass die Schritte wohldefiniert sind. Wir setzen die Form der Protokacheln  $K$  und  $D$  – das heißt die Seitenlängen und die Winkel – sowie die Anlegeregeln voraus.

Wir beginnen mit dem Beweis der Komposition.

*Beweis des Teilungstricks.* Wir zeigen, dass die Protokacheln  $K$  und  $D$  eine *Symmetrieachse* besitzen, indem wir diese konkret angeben und nachweisen, dass durch Spiegelung an dieser Geraden die dadurch entstehenden Polygone miteinander zur Deckung kommen. Wir bezeichnen bei den markierten Protokacheln  $K$  und  $D$  die Ecken mit  $A, B, C$  und  $D$  wie in den Abbildungen 2.30 und 2.31. Dann ist sowohl für  $K$  als auch  $D$  die Gerade  $A \vee C$  eine Symmetrieachse, denn nach dem Kongruenzsatz für Dreiecke SWS sind die Dreiecke  $\triangle CDA$  und  $\triangle CBA$  kongruent:

- Für  $K$  gilt nach Voraussetzung: Die Strecke  $\overline{CD}$  hat die Länge  $\phi$ , ebenso die Strecke  $\overline{CB}$ . Die Winkel  $\angle CDA$  und  $\angle CBA$  haben beide die Größe  $2\alpha$ . Die Strecken  $\overline{DA}$  und  $\overline{BA}$  haben beide die Länge 1. Die drei Größen sind also kongruent und somit kann der Kongruenzsatz SWS angewandt werden.
- Für  $D$  gilt nach Voraussetzung: Die Strecke  $\overline{CD}$  hat die Länge  $\phi$ , ebenso die Strecke  $\overline{CB}$ . Die Winkel  $\angle CDA$  und  $\angle CBA$  haben beide die Größe  $\alpha$ . Die Strecken  $\overline{DA}$  und  $\overline{BA}$  haben beide die Länge 1. Die drei Größen sind also kongruent und somit kann der Kongruenzsatz SWS angewandt werden.

Insgesamt folgt, dass die Gerade  $A \vee C$  eine Symmetrieachse für die Protokacheln  $K$  und  $D$  ist.

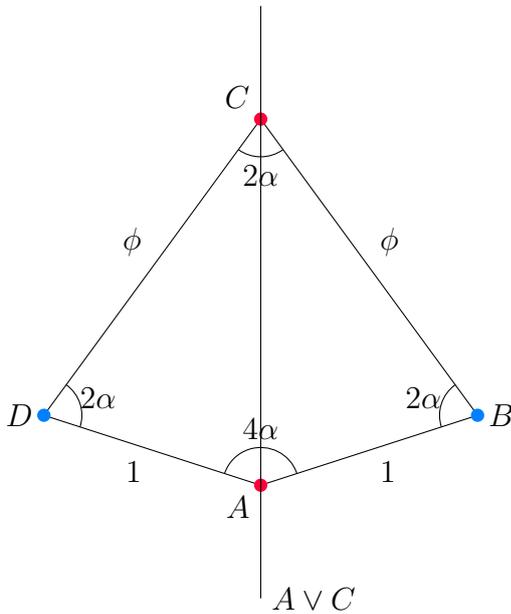


Abbildung 2.30: Drachen  $K$  mit Symmetrieachse

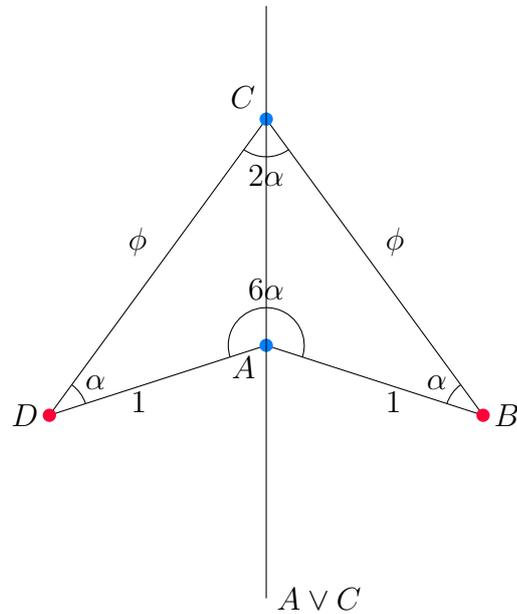


Abbildung 2.31: Pfeil  $D$  mit Symmetrieachse

Die folgende Argumentation gilt für beide Protokacheln  $K$  und  $D$  und dient dazu, die *Gleichschenkligkeit* der Dreiecke zu zeigen:

Aufgrund der Kongruenz der Dreiecke  $\triangle CDA$  und  $\triangle CBA$  sind auch die Winkel  $\angle DAC$  und  $\angle BAC$  kongruent und damit gleich groß, ebenso die Winkel  $\angle DCA$  und  $\angle BCA$ . Dementsprechend ist die Gerade  $A \vee C$  die Winkelhalbierende für die Winkel  $\angle DAB$  und  $\angle DCB$ .

Ebenfalls wegen der Kongruenz der Dreiecke sind die Strecken  $\overline{DA}$  und  $\overline{BA}$  kongruent und damit gleich lang, das gleiche gilt für die Strecken  $\overline{DC}$  und  $\overline{BC}$ . Damit ist die Gerade  $A \vee C$  auch die Mittelsenkrechte der Punkte  $D$  und  $B$ .

Da  $A \vee C$  die Winkelhalbierende von  $\angle DAB$  und  $\angle DCB$  ist, können wir die Größe der Winkel  $\angle DAC$  (für  $K$ ) und  $\angle DCA$  (für  $D$ ) ausrechnen. Der Winkel  $\angle DAC$  in der Protokachel  $K$  beträgt  $2\alpha$  und ist damit kongruent zum Winkel  $\angle ADC$  und in der Protokachel  $D$  beträgt der Winkel  $\angle DCA$  gerade  $\alpha$ , womit dieser Winkel kongruent ist zu  $\angle CDA$ . Aufgrund der Kongruenzeigenschaften der Dreiecke gelten diese Strecken- und Winkelkongruenzen auch für das kongruente Dreieck. Nach [KV18, Prop. 3.72] ist damit das Dreieck  $\triangle DAC$  (und somit auch das kongruente Dreieck  $\triangle BAC$ ) gleichschenkelig.

Die *Markierungen der Anlegeregeln*, die durch die Symmetrieachse geteilt werden, werden auf beide Kacheln  $\triangle A$  bzw.  $\triangle B$  übertragen. Aufgrund der Lage der Anlegeregeln ist die Markierung der Pfeilspitze eindeutig: Da in beiden Protokacheln die Anlegeregeln so gewählt sind, dass Markierungen an benachbarten Ecken nicht übereinstimmen, müssen durch die Teilung zum Dreieck zwei benachbarte Ecken dieselbe Markierung aufweisen und somit die geforderte Kante existieren, an der die Pfeilspitze angebracht werden kann. Wie bereits gezeigt wurde, sind die Dreiecke  $\triangle A$  und  $\triangle B$  gleichschenkelig, sodass für beide eindeutig die Basis und die Spitze ausgemacht werden kann. Die Markierung der Pfeilspitze dient dazu, diesen Schritt auch rückwärts ausführen zu können und die Kacheln an der so markierten Kante wieder zusammenfügen zu können, sodass die Protokacheln mit den geforderten Anlegeregeln entstehen.

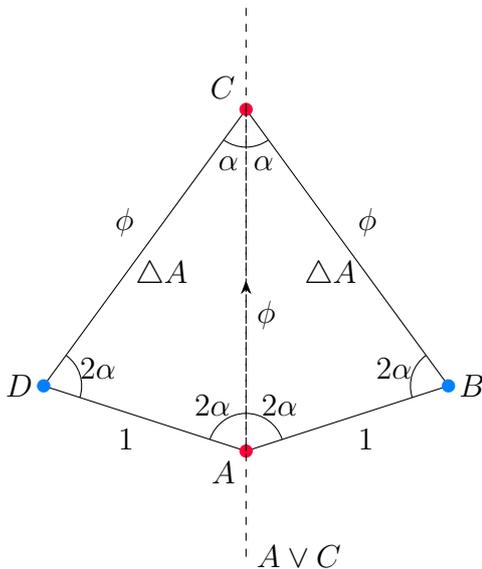


Abbildung 2.32: Drachen  $K$  mit Pfeilspitze

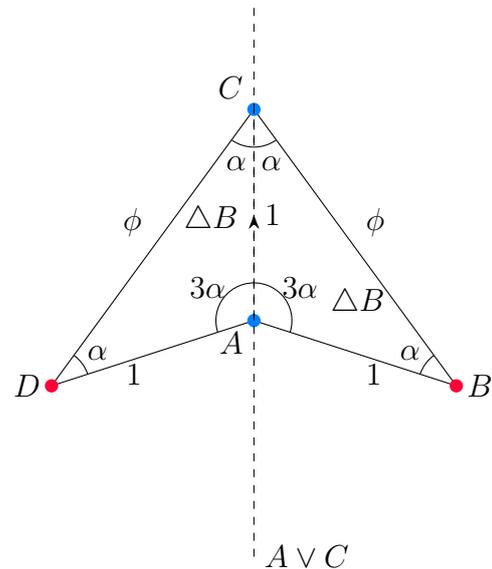


Abbildung 2.33: Pfeil  $D$  mit Pfeilspitze □

*Beweis des Kompositionstricks 1.* Nach dem Teilungstrick entstehen die Kacheln  $\triangle B$  aus der Protokachel  $D$ . An Kopien der Protokachel  $D$  kann an die im Bild grün und orange markierten Seiten nach den Anlegeregeln nur eine Kopie der Protokachel  $K$  gelegt werden und zwar so, dass die grünen bzw. orangen Seiten aneinanderliegen.

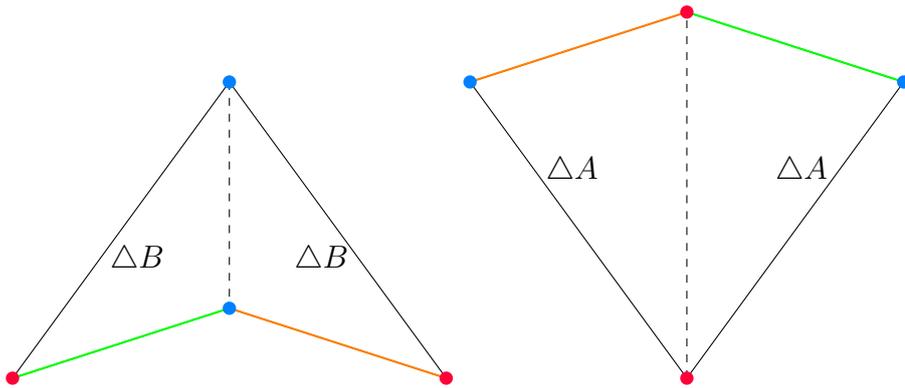


Abbildung 2.34: Möglichkeit, Pfeil und Drachen aneinanderzulegen

Dass an die Kachel  $D$  keine andere Anlegemöglichkeit besteht liegt einerseits an der Länge der Seite und andererseits an der Bedingung, dass keine Raute gelegt werden darf. Daraus folgt dann auch, dass keine zwei Drachen an den Seiten der Länge 1 aneinandergelagt werden können. Da aus den Kacheln  $K$  nach dem Teilungstrick (Algorithmus 2.24, Schritt 1) Kacheln  $\triangle A$  entstehen, liegt somit an der besagten kurzen Seite von  $\triangle B$  immer eine Kachel  $\triangle A$ , sodass es möglich ist, diese beiden Kacheln zu einer Kachel  $\phi B'$  zusammenzufassen.

Wir zeigen als nächstes die *Ähnlichkeit* von  $\triangle B$  und  $\phi B'$ : Nach dem Teilungstrick (Algorithmus 2.24, Schritt 1) kennen wir die Winkel der Dreiecke  $\triangle A$  und  $\triangle B$ . Das Dreieck  $\triangle B$  hat die Winkel  $\alpha, \alpha$  und  $3\alpha$ . Das Dreieck  $\triangle A$  hat die Winkel  $\alpha, 2\alpha$  und  $2\alpha$ . Die beiden Dreiecke werden so zusammengefügt, dass die Winkel der Größe  $3\alpha$  aus der Kachel  $\triangle B$  und  $2\alpha$  aus der Kachel  $\triangle A$  aneinander liegen, sowie die Winkel der Größe  $\alpha$  aus der Kachel  $\triangle B$  und  $2\alpha$  aus der Kachel  $\triangle A$ . Der Winkel  $5\alpha$  ergibt einen gestreckten Winkel, sodass die drei Winkel  $\alpha, 3\alpha$  und  $\alpha$  übrig bleiben. Die Dreiecke  $\phi B'$  und  $\triangle B$  besitzen folglich gleich große Winkel und sind somit ähnlich.

Genauer ist  $\phi B'$  das um  $\phi$  reskalierte Dreieck  $\triangle B$ , denn: Das Dreieck  $\triangle B$  hat die Seitenlängen  $\phi, 1$  und  $1$ . Aufgrund der Gleichschenkligkeit von  $\phi B'$  (da  $\triangle B$  gleichschenklig ist, muss es  $\phi B'$  aufgrund der Ähnlichkeit auch sein) haben die Schenkel von  $\phi B'$  die Länge  $\phi$ . Die Grundseite von  $\phi B'$  besteht aus der Summe von zwei Strecken der Länge  $1$  und  $\phi$ , also einer Gesamtlänge von  $1 + \phi = \phi^2$ . Das bedeutet insgesamt, dass jede Länge um den Faktor  $\phi$  vergrößert wurde.

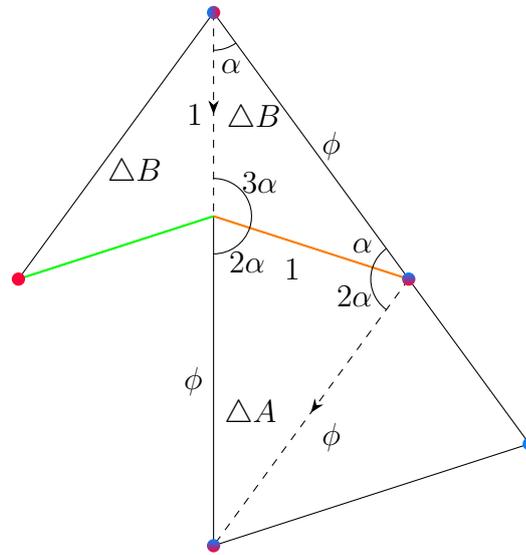


Abbildung 2.35: Nähere Betrachtung von  $\phi B'$

Die Notation „ $\phi$ “ bedeutet, dass alle betroffenen Markierungen invertiert werden. Da es für die Markierungen der Anlegeregeln und die Richtung der Pfeile nur zwei Möglichkeiten gibt, ist diese Forderung wohldefiniert.

Aufgrund dieser wohldefinierten Forderung ist es möglich, den Schritt auch rückwärts auszuführen und so aus Kacheln vom Typ  $\Delta A$  und  $\phi B'$  wieder Kacheln vom Typ  $\Delta A$  und  $\Delta B$  zu erhalten.  $\square$

*Beweis des Kompositionstricks 2.* Beim Teilungstrick (Algorithmus 2.24, Schritt 1) werden die Kopien der Protokachel  $K$  so geteilt, dass zwei Kacheln vom Typ  $\Delta A$  an ihrer langen Seite aneinanderliegen. Wenn eine der beiden Kacheln  $\Delta A$  entsprechend dem Kompositionstrick 1 (Algorithmus 2.24, Schritt 2) an der kurzen Seite zu einer Kachel des Typs  $\phi B'$  zusammengefügt wird, ändert das nichts an der Lage der beiden Kacheln vom Typ  $\Delta A$  zueinander, nur dass nach dem Kompositionstrick 1 (Algorithmus 2.24, Schritt 2) eine Kachel vom Typ  $\Delta A$  an einer langen Seite an eine Kachel vom Typ  $\phi B'$  grenzt. Somit können diese zusammengefasst werden zu einer Kachel  $\phi A'$ .

Diese ist *ähnlich* zu  $\Delta A$ , denn:  $\Delta A$  hat nach dem Teilungstrick (Algorithmus

2.24, Schritt 1) die Winkel  $\alpha$ ,  $2\alpha$  und  $2\alpha$  und dem Kompositionstrick 1 (Algorithmus 2.24, Schritt 2) zufolge hat  $\phi B'$  die Winkel  $\alpha$ ,  $3\alpha$  und  $\alpha$ . Die Kacheln werden wie in der Abbildung 2.36 zusammengefügt, sodass ein Winkel der Größe  $2\alpha$  aus der Kachel  $\triangle A$  und ein Winkel der Größe  $3\alpha$  aus der Kachel  $\phi B'$  aneinanderliegen und einen gestreckten Winkel ergeben. Des Weiteren liegen ein Winkel der Größe  $\alpha$  aus der Kachel  $\triangle A$  und ein Winkel der Größe  $\alpha$  aus der Kachel  $\phi B'$  aneinander und ergeben einen Winkel von  $2\alpha$ . Somit hat  $\phi A'$  die Winkel  $\alpha$ ,  $2\alpha$  und  $2\alpha$  und ist damit ähnlich zu  $\triangle A$ .

Außerdem ist  $\phi A'$  um den Faktor  $\phi$  reskaliert, denn: Da  $\triangle A$  gleichschenkelig ist, muss aufgrund der Ähnlichkeit auch  $\phi A'$  gleichschenkelig sein. Die Basis von  $\triangle A$  hat eine Länge von 1, während die Basis von  $\phi A'$  eine Länge von  $\phi$  hat (wie in der Abbildung zu erkennen ist). Im Kompositionstrick 1 (Algorithmus 2.24, Schritt 2) wurde bereits gezeigt, dass die Basis von  $\phi B'$  eine Länge von  $\phi^2$  hat, diese Basis wird bei  $\phi A'$  zu einem Schenkel. Gesamt ergibt sich, dass  $\phi A'$  die um  $\phi$  reskalierte Kachel  $\triangle A$  ist und die Bezeichnung somit sinnvoll ist.

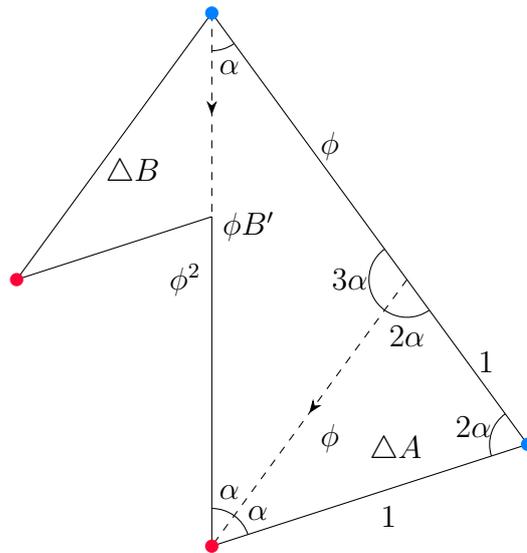


Abbildung 2.36: Nähere Betrachtung von  $\phi A'$

Wie im Beweis des Kompositionstricks 1 bedeutet die Notation „ $\overset{\leftarrow$ “, dass alle betroffenen Markierungen invertiert werden. Mit demselben Argument ist diese Forderung wohldefiniert. Analog ist es auch in diesem Schritt aufgrund der Wohlde-

finiertheit der Forderung möglich, diesen Schritt rückwärts auszuführen und so aus Kacheln vom Typ  $\phi A'$  und  $\phi B'$  Kacheln vom Typ  $\triangle A$  und  $\phi B'$  zu erhalten.  $\square$

*Beweis der Komposition.* Wie in den beiden vorherigen Beweisen ist die Invertierung der Markierungen der Anlegeregeln eindeutig, ebenso die Richtung der Pfeilspitzen. Somit ist eine eindeutige Rückführung von  $\phi A'$  zu  $\phi K$  und von  $\phi B'$  zu  $\phi D$  möglich.  $\square$

*Beweis der Dekomposition.* Aufgrund der Eindeutigkeit der Schritte des Kompositionsverfahrens ist an dieser Stelle nichts mehr zu zeigen. Da in den vorherigen Beweisen gezeigt wurde, dass jeder dieser Schritte auch eindeutig rückwärts ausgeführt werden kann, ergibt sich die Gültigkeit des Dekompositionsverfahrens.  $\square$

*Beweis der Inflation und Deflation.* Die Verkettung von Reskalierung mit  $\phi$  und Dekomposition ist kommutativ, da es keine Rolle spielt, ob die Protokacheln und ihre Kopien zuerst um  $\phi$  vergrößert werden und dann der Dekompositionsprozess durchgeführt wird, oder ob die Protokacheln zuerst dekomponiert werden und anschließend durch die Reskalierung mit  $\phi$  die ursprüngliche Größe wiederhergestellt wird, da der Dekompositionsvorgang auf Kacheln jeder Größe angewandt werden kann und diese immer um  $\phi$  verkleinert werden. Durch die Vergrößerung der Kacheln mit  $\phi$  wird die parkettierte Fläche schließlich um  $\phi$  größer.

Die Argumentation für die Deflation folgt analog.  $\square$

## KAPITEL 3

---

# Die Penrose-Parkettierung auf der Ebene und ihre Eigenschaften

---

### 3.1 Hauptresultat

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der folgende Satz:

**Hauptsatz 3.1.** *Mit der Menge von Protokacheln  $\{K, D\}$  kann die Ebene  $\mathbb{E}$  durch eine aperiodische Parkettierung überdeckt werden.*

Die folgenden beiden Unterabschnitte widmen sich dem Beweis dieses Satzes. Dazu teilen wir die Aussage des Satzes auf und beweisen nacheinander die Existenz (Abschnitt 3.1.1) und die Aperiodizität (Abschnitt 3.1.2).

#### 3.1.1 Die Existenz der Penrose-Parkettierung auf der Ebene

Wir beschäftigen uns in diesem Unterabschnitt zunächst allgemein mit Aussagen über Kacheln, genauer der Konvergenz einer Folge von Kacheln unter gewissen Voraussetzungen. Anschließend formulieren und beweisen wir einen wichtigen Hilfssatz, das Ausdehnungstheorem 3.9. Mithilfe dieses Satzes können wir in Satz 3.10 die Existenz der Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil beweisen. Damit

wir das Ausdehnungstheorem formulieren und beweisen können, brauchen wir noch einige topologische Definitionen sowie das Auswahltheorem 3.5 und sein Korollar 3.6.

**Definition 3.2** ([Fuc08, Def. 2.3]). Seien  $X, Y$  Kacheln. Dann definieren wir den *Hausdorff-Abstand*  $d(X, Y)$  durch

$$d(X, Y) := \max \left\{ \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\|_2, \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_2 \right\},$$

wobei  $\|\cdot\|_2$  den Euklidische Abstand in  $\mathbb{E}$  bezeichnet.

Wenn  $d(X, Y) = 0$  ist für abgeschlossene Kacheln  $X$  und  $Y$ , so gilt  $X = Y$ .

Basierend auf diesem Abstands begriff führen wir einen Konvergenzbegriff für Kacheln ein.

**Definition 3.3** ([Rit14, Abschn. 2.4]). Sei  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Kacheln. Wir nennen diese Folge *konvergent* gegen eine Kachel  $S$ , wenn für den Hausdorff-Abstand  $d(S_n, S) \rightarrow 0$  gilt für  $n \rightarrow \infty$ . Wir schreiben dann  $S_1, S_2, S_3, \dots \rightarrow S$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

*Bemerkung 3.4.* Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den gleichen Limes [For16].

**Satz 3.5** (Auswahltheorem [Rit14, Thm. 4]). *Es seien eine Protokachel  $T$ , ein Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  und eine Folge von Kacheln  $S_1, S_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^2$ , die alle den Punkt  $p$  enthalten und die allesamt Kopien von  $T$  sind (die  $S_j$  sind demnach bis auf Translation und Rotation alle gleich) gegeben. Dann gibt es eine Teilfolge  $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots$  von  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen eine Kachel  $S$  konvergiert, die  $p$  enthält und die eine Kopie von  $T$  ist.*

Der folgende Beweis folgt [Rit14, Bew. Thm. 4].

*Beweis des Auswahltheorems.* Da alle Kacheln  $S_k$  in der Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Kopien der Protokachel  $T$  sind, ist es möglich, die  $S_k$  isomorph zu  $T$  zu identifizieren, also  $S_k \cong T$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Durch diese Isomorphie wird der Punkt  $p$  für jede Kachel  $S_k$

mit einem Punkt  $q_j$  in  $T$  identifiziert. Wir betrachten nun die Menge der Punkte  $q_j$  in  $T$ . Da  $T$  eine Kachel ist, ist  $T$  eine abgeschlossene und beschränkte Menge und damit kompakt. Nach [Dob10] ist die Protokachel  $T$  damit auch folgenkompakt, das heißt, es existiert für jede Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. Sei also  $(q_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge, die gegen einen Punkt  $q \in T$  konvergiert. Aufgrund der Identifikation  $S_k \cong T$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  können wir alle Kacheln  $S_{j_n}$  auswählen, deren Identifikationspunkt  $p$  einem Folgenglied  $q_{j_n}$  der konvergenten Teilfolge entspricht. Wir erhalten also eine Teilfolge von Kacheln  $(S_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Diese Teilfolge ist allerdings noch nicht notwendigerweise konvergent, da die Kacheln  $S_k$  sich sowohl um einen Verschiebungsvektor  $q - q_{j_n}$  als auch einen Rotationswinkel  $\alpha \in [0, 2\pi]$  bezüglich des kartesischen Koordinatensystems von  $T$  unterscheiden. Da die Menge  $[0, 2\pi]$  ebenfalls abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt ist, können wir auch hier eine konvergente Teilfolge der Winkel der  $S_{j_n}$  auswählen mit  $\alpha_{m_{j_n}} \rightarrow \alpha$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es gibt also sowohl einen Limespunkt  $q$  als auch einen Limeswinkel  $\alpha$ . Die Folge  $(S_{m_{j_n}})_{n \in \mathbb{N}}$  von Kacheln konvergiert dann gegen eine Kachel  $S$ , diese ist um  $\alpha$  rotiert bzgl. des kartesischen Koordinatensystems und über die Identifikation  $S \cong T$  ergibt sich für diese Kachel  $q = p$ .  $\square$

**Korollar 3.6** (Auswahltheorem [Rit14, Kor. 5]). *Sei eine endliche Menge  $\mathcal{F}$  von Protokacheln gegeben, wobei jede Protokachel eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ist. Wenn  $S_1, S_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Folge von Kacheln in der Ebene ist, wobei jede Kachel  $S_i$  eine Kopie einer Kachel aus  $\mathcal{F}$  ist und jede Kachel einen festen Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  enthält, dann gibt es eine Teilfolge  $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots$ , die gegen eine Kachel  $S$  konvergiert, die den Punkt  $p$  enthält und die Kopie einer Kachel aus  $\mathcal{F}$  ist.*

Wir folgen dem Beweis von [Rit14, Bew. Kor. 5].

*Beweis des Korollars.* Da die Menge der Protokacheln endlich ist und die Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abzählbar unendlich viele Folgenglieder besitzt, muss ein Protokacheltyp unendlich oft auftreten. Wir entfernen alle übrigen Folgenglieder, die nicht mit diesem Protokacheltyp übereinstimmen und erhalten die Teilfolge  $(S_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , die nur noch Kacheln enthält, die alle Kopien einer Protokachel sind und alle einen gemeinsamen Punkt enthalten. Durch Anwenden des Auswahltheorems 3.5 folgt direkt die Behauptung.  $\square$

Bevor wir das Ausdehnungstheorem formulieren und beweisen, definieren wir den Begriff eines In- und Umkreises für eine Menge von Protokacheln [Fuc08, Def. 2.5].

**Definition 3.7** ([Fuc08, Def. 2.5]). Sei  $\mathcal{F}$  eine endliche Menge von Protokacheln. Wir bezeichnen  $U \in \mathbb{R}_{>0}$  als einen *Umkreisradius* von  $\mathcal{F}$ , wenn alle Protokacheln aus  $\mathcal{F}$  in einer Kreisscheibe mit Radius  $U$  vollständig enthalten sind. Des Weiteren bezeichnen wir  $u \in \mathbb{R}_{>0}$  als einen *Inkreisradius* von  $\mathcal{F}$ , wenn in jeder Protokachel aus  $\mathcal{F}$  eine Kreisscheibe mit Radius  $u$  vollständig enthalten ist.

*Bemerkung 3.8.* Da die Protokacheln Polygone sind und Polygone ein nicht-leeres Inneres besitzen, existiert der geforderte Inkreis. Da das Polygon abgeschlossen ist und der Streckenzug endlich ist, existiert der Umkreis. Es gilt zudem  $0 < u < U$ .

Wir erinnern an Bemerkung 2.2, nach dieser sind Kacheln zu Kreisscheiben homöomorph. Diese Aussage benötigen wir für den folgenden Satz:

**Satz 3.9** (Ausdehnungstheorem [Fuc08, Thm. 2.8]). *Es sei eine endliche Menge von Protokacheln  $\mathcal{F}$  gegeben, wobei jede Kachel eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{E}$  ist, die zu einer Scheibe homöomorph ist. Wenn für jede beliebig groß gewählte Kreisscheibe eine partielle Parkettierung mit den Kacheln auf  $\mathcal{F}$  gefunden werden kann, die die Kreisscheibe überdeckt, dann existiert eine Parkettierung von  $\mathbb{E}$  mit den Kacheln aus  $\mathcal{F}$ .*

*Beweis des Ausdehnungstheorems.* Wir führen diesen Beweis inhaltlich und strukturell nach [Rit14, Bew. Thm. 7], im letzten Schritt weichen wir allerdings von dieser Beweisführung ab und folgen der Ausführung von [Fuc08, Bew. Thm. 2.8].

1. Wir wählen  $u \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass  $u$  ein Inkreisradius von  $\mathcal{F}$  ist, dann enthält jede Protokachel aus  $\mathcal{F}$  eine Kreisscheibe mit Radius  $u$ . Dadurch enthält auch jede Kopie einer Protokacheln aus  $\mathcal{F}$  eine Kreisscheibe mit Radius  $u$ . Wir betrachten das Gitter  $m \cdot \mathbb{Z} \times m \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $m := \frac{u}{100}$ , also die ganzzahligen Koordinaten des  $\mathbb{R}^2$  mit einer Konstante  $m$  multipliziert. Dann muss – nach Wahl von  $u$  – jede Kopie der Protokacheln aus  $\mathcal{F}$ , die in die Euklidische Ebene gelegt wird, mindestens einen Gitterpunkt im Inneren enthalten.
2. Die Gitterpunkte sind abzählbar, eine mögliche Abzählung beginnt bei  $(0, 0)$  und geht dann spiralförmig nach außen, wie in der Abbildung 3.1 gezeigt wird.

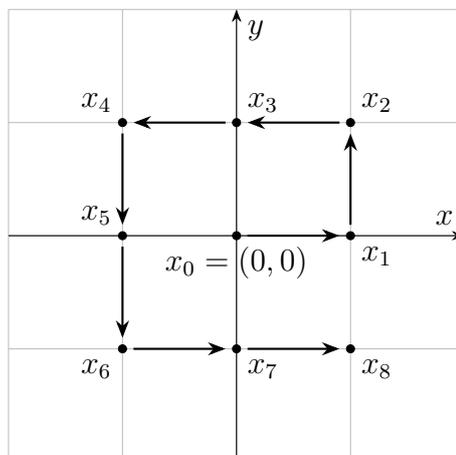


Abbildung 3.1: Abzählung der Gitterpunkte

3. Sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig aber fest und  $B_r(0)$  eine Kreisscheibe um 0 mit Radius  $r$ . Wir bezeichnen mit  $T(r)$  eine partielle Parkettierung, die die Kreisscheibe  $B_r(0)$  überdeckt.

Sei  $x_s$  ein Gitterpunkt in  $m\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ , der in der Kreisscheibe  $B_r(0)$  liegt. Wir bezeichnen eine Kachel aus der partiellen Parkettierung  $T(r)$ , die  $x_s$  enthält, mit  $T_{r,s} \in T(r)$ .

4. Sei  $r_1, r_2, r_3, \dots$  eine aufsteigende Folge von Radien (das heißt  $r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ ), sodass  $r_1, r_2, r_3, \dots \rightarrow \infty$ . Für diese Folge von Radien erhält man dann eine Folge von Kacheln  $T_{r_1,s}, T_{r_2,s}, T_{r_3,s}, \dots$  (also  $(T_{r_n,s})_{n \in \mathbb{N}}$ ), die den Punkt  $x_s$  enthalten. Diese Kacheln stammen nicht notwendigerweise aus derselben partiellen Parkettierung. Durch die aufsteigende Folge der Radien können wir Kreisscheiben um 0 betrachten, die immer größer werden und die – nach Voraussetzung – immer von einer partiellen Parkettierung  $T(r_i)$  mit  $i \in \mathbb{N}$  überdeckt werden können. Aus diesen partiellen Parkettierungen stammen dann die Kacheln um den Punkt  $x_s$ .

Nach dem Korollar des Auswahltheorems 3.6 gibt es so eine Teilmenge von Radien  $\{r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, r_3^{(1)}, \dots\} \subseteq \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ , dass die Teilfolge  $(T_{r_n^{(1)},s})_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(T_{r_n,s})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen eine Kachel  $S$  konvergiert. Diese Kachel enthält nach dem Korollar des Auswahltheorems  $x_s$  und ist die Kopie einer Protokachel aus  $\mathcal{F}$ .

5. Wir führen Schritt 4 durch für  $s = 1$ , das heißt die Folge der Kacheln, die wir betrachten, enthält  $x_1$  und für positive ganzzahlige Radien, das heißt  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Wir erhalten dadurch eine Teilfolge  $(r_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ . So erhalten wir eine Folge von Kacheln, die den Punkt  $x_1$  enthalten, und die aus den verschiedenen Teilparkettierungen  $T(r_1^{(1)}), T(r_2^{(1)}), T(r_3^{(1)}), \dots$  stammen. Nach Annahme überdecken sie Bälle um 0 mit dem jeweils indizierten Radius. Wir notieren diese Teilfolge als  $(T_{r_n^{(1)}, 1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Wie in Schritt 4 konvergiert diese Folge von Kacheln gegen eine Kachel  $S_1$ , die den Punkt  $x_1$  enthält und die die Kopie einer Protokachel aus  $\mathcal{F}$  ist.

Sei nun  $s = 2$ , das heißt wir führen diesen Schritt für den Punkt  $x_2$  durch. Wir betrachten als Radien eine Teilfolge von  $(r_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ , diese bezeichnen wir mit  $(r_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir erinnern uns, dass schon die Folge  $(r_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, das heißt die neue Teilfolge hat als Elemente ebenfalls positive ganze Zahlen in aufsteigender Reihenfolge. Wir wählen diese Teilfolge  $(r_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$  so, dass die Folge  $(T_{r_n^{(2)}, 2})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen eine Kachel  $S_2$  konvergiert, wobei  $S_2$  den Punkt  $x_2$  enthält und die Kopie einer Protokachel aus  $\mathcal{F}$  ist.

Nach diesem Verfahren gehen wir induktiv vor, das heißt für  $s = m + 1$  erhalten wir eine Folge von Radien  $(r_n^{(m+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ , die eine Teilfolge von  $(r_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  ist und für die die Folge der Kacheln  $(T_{r_n^{(m+1)}, m+1})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen eine Kachel  $S_{m+1}$  konvergiert, die den Punkt  $x_{m+1}$  enthält und die die Kopie einer Protokachel aus  $\mathcal{F}$  ist.

Wir bemerken, dass durch die Konstruktion der Teilfolgen der Radien  $\{r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, r_3^{(n)}, \dots\} \subseteq \{r_1^{(n-1)}, r_2^{(n-1)}, r_3^{(n-1)}, \dots\}$  eine Abhängigkeit zwischen den partiellen Parkettierungen besteht.

6. Nach Konstruktion ist die Kachel  $S_i$  der Limes

$$S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{r_n^{(i)}, i}.$$

Wir nennen diese Kacheln  $S_i$  im folgenden Grenzwertkacheln. Nach der obigen Bemerkung 3.4 (wenn eine Folge konvergiert, so konvergiert jede Teilfolge gegen denselben Limes) ist die Kachel  $S_i$  auch der Limes von jeder Teilfolge von  $(T_{r_n^{(i)}, i})_{n \in \mathbb{N}}$ . Für die Konstruktion dieser Teilfolge betrachten wir Teilfolgen der  $i$ -ten Teilfolge, sodass die Teilfolgen von  $(T_{r_n^{(i)}, i})_{n \in \mathbb{N}}$  z.B.  $(T_{r_n^{(i+1)}, i})_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(T_{r_n^{(i+2)}, i})_{n \in \mathbb{N}}$  sind. In allgemeiner Form schreiben wir diese als  $(T_{r_n^{(k)}, i})_{n \in \mathbb{N}}$  für

$k \geq i$ , sodass gilt

$$S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{r_n^{(k)}, i} \text{ für } k \geq i.$$

7. Wir zeigen, dass die Menge  $X := \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$  für  $i \in \mathbb{N}$  eine Parkettierung der Ebene ist. Die  $S_i$  sind die Grenzwertkacheln aus Schritt 6. Da jede Grenzwertkachel  $S_i$  die Kopie einer Protokachel aus  $\mathcal{F}$  ist, wissen wir, dass  $S_i$  homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist. Es verbleibt zu zeigen:

- a) Für alle Grenzwertkacheln  $S_i, S_j$  ist der Schnitt des Inneren leer, außer wenn  $S_i = S_j$  ist;
- b) Die Vereinigung  $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$  ist die Ebene.

Wir beginnen mit 7a. Sei  $y$  ein beliebiger Punkt in der Ebene. Wir zeigen, dass  $y$  in mindestens einer Grenzwertkachel  $S_i$  liegt (er liegt in mehreren, wenn  $y$  auf einer Ecke oder Kante liegt). Wir wählen  $U \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass ein Kreis mit Radius  $U$  der Umkreis für die Menge der Protokacheln  $\mathcal{F}$  ist, folglich jede Protokachel aus  $\mathcal{F}$  vollständig enthält. Wir betrachten die Kreisscheibe  $B_U(y)$ . In dieser liegt mindestens ein Gitterpunkt  $x_l$ , denn es ist  $U \geq u$  und schon in jeder Kreisscheibe mit Radius  $u$  liegt mindestens ein Gitterpunkt. Wir wählen in der Kreisscheibe  $B_U(y)$  den Gitterpunkt mit dem maximalen Index und bezeichnen diesen mit  $k$ . Jetzt betrachten wir die Menge der Radien  $(r_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Für alle Radien  $r$  in dieser Menge definieren wir  $X_r := \{T_{r,0}, T_{r,1}, T_{r,2}, \dots\}$ . Das bedeutet, dass wir für jedes  $r \in (r_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  die Menge von Kacheln betrachten, die die Gitterpunkte  $x_i, \dots, x_k$  enthalten. Wir wissen aus Schritt 6, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{r_n^{(j)}, j} = S_j$  ist (die Kacheln um  $x_j$  konvergieren für aufsteigendes  $n$  – das heißt für aufsteigendes  $r$  – gegen eine Grenzwertkachel  $S_j$ ). Das bedeutet, dass komponentenweise  $X_r \rightarrow X$  geht für  $r \rightarrow \infty$ . Für jedes  $r$  entsteht eine Teilparkettierung  $T(r)$  und eine Eigenschaft von Teilparkettierungen ist, dass ihre Kacheln sich nur an den Rändern überlappen und im Inneren disjunkt sind. Die Kacheln dieser Teilparkettierung  $T(r)$  sind auch Elemente aus  $X_r$ . Das bedeutet, dass zwei Kacheln  $T_{r,i}$  und  $T_{r,j}$  aus  $X_r$  nur dann im Inneren überlappen können, wenn sie schon gleich sind, andernfalls sind sie disjunkt. Wenn demnach  $y$  in der Teilparkettierung  $T(r)$  liegt, liegt  $y$  im Inneren von höchstens einer Kachel.

Wir zeigen 7b. Um zu zeigen, dass  $y$  tatsächlich in dem Ausschnitt enthalten ist,

müssen wir zeigen, dass der Mittelpunkt von  $B_U(y)$  in einer Teilparkettierung  $T(r)$  liegt. Es gibt genau drei Möglichkeiten, wie der Punkt  $y$  zu dem Gitter liegen kann: im Inneren, auf einer Kante oder einer Ecke eines Quadrats, das vier Punkte des Gitters verbindet. Eine Kreisscheibe mit Radius  $u$  um  $y$  umschließt oder berührt – aufgrund der Konstruktion des Gitters – zu jeder Zeit mindestens zwei Punkte des Gitters. Einer dieser beiden Punkte hat einen größeren Index als der andere. Für eine Kreisscheibe mit Radius  $U \geq u$  gilt das Gleiche. Wir bezeichnen diese beiden Gitterpunkte  $x_a$  und  $x_b$  und betrachten die Verbindung zwischen diesen Punkten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $a > b$ . Wenn eine Teilparkettierung  $T(r)$  einen Gitterpunkt  $x_k$  enthält, so auch alle Gitterpunkte  $x_i$  mit  $i < k$ . Wenn also  $x_a$  in diesem Ausschnitt liegt, so enthält dieser auch  $x_b$ . Dann ist auch die ganze Verbindungslinie zwischen den Punkten enthalten und so auch der Punkt  $y$ . Da der Gitterpunkt  $x_k$  den maximalen Index hat, ist  $a \leq k$ , also enthält die Teilparkettierung  $T_r$  den Gitterpunkt  $x_a$ , damit auch den Gitterpunkt  $x_b$  und somit auch  $y$ . Dies gilt für alle  $r$ , die wir betrachten.

Wenn für jedes  $r \in (r_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  mindestens eine Kachel in  $X_r$  den Punkt  $y$  enthält und nicht mehr als eine Kachel aus  $X_r$  im Inneren  $y$  enthält, dann gilt das gleiche für die Menge  $X$ , da dies für alle  $r$  gilt, die wir betrachten und  $X$  der Grenzwert von  $X_r$  ist. Das bedeutet, dass  $X$  eine Parkettierung bildet. Wir erhalten somit eine Parkettierung der Ebene, in diesem Fall, anschaulich gesprochen, dargestellt durch eine Kreisscheibe mit einem unendlich großen Radius.  $\square$

Mithilfe dieses Satzes und des Inflationsverfahrens 2.27 können wir die Existenz einer Parkettierung folgern, die mit den Protokacheln  $K$  und  $D$  gelegt wird.

**Satz 3.10** ([Rit14, Abschn. 5]). *Eine Parkettierung mit der Protokachelmenge  $\mathcal{F} = \{K, D\}$  existiert.*

*Beweis der Existenz.* Wir überprüfen zunächst die Voraussetzungen des Ausdehnungstheorems.

- Die Menge der Protokacheln  $\mathcal{F} = \{K, D\}$  ist endlich.
- Die Protokacheln sind nach Definition Polygone und somit abgeschlossen, beschränkt und homöomorph zu einer Kreisscheibe (da sie von einer geschlossenen Kurve begrenzt werden, die keine Selbstüberschneidungen hat).

Protokacheln sind somit als Polygone nicht-leer. Wir wählen ohne Einschränkung eine Kopie der Protokachel  $K$  und legen diese so auf die Euklidische Ebene, dass sie den Punkt  $0$  enthält. Wir bezeichnen dies als Teilparkettierung  $T_0$ . Wie im Beweis des Ausdehnungstheorems wählen wir ein  $u \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass die Kreisscheibe  $B_u(0)$  ganz in  $T_0$  enthalten ist. Dann überdeckt die Teilparkettierung  $T_1$  die Kreisscheibe  $B_u(0)$ . Wir wählen einen Radius  $r \in \mathbb{R}_{>u}$  so, dass die Teilparkettierung die Kreisscheibe  $B_r(0)$  nicht überdeckt. Durch Anwenden des Inflationsverfahrens 2.27 auf  $T_0$  wird diese um den Faktor  $\phi$  vergrößert und die Kacheln behalten ihre Größe bei, das heißt es handelt sich weiterhin um Kopien der Protokacheln  $K$  und  $D$ . Wir nennen die Teilparkettierung, die durch einmaliges Anwenden der Inflation entsteht,  $T_1$  und bezeichnen allgemein die Teilparkettierung, die durch  $n$ -maliges Anwenden der Inflation auf die Teilparkettierung  $T_0$  entsteht mit  $T_n$ . Wir wenden  $m$ -mal den Inflationsvorgang auf die Parkettierung  $T_0$  an, wobei  $m \in \mathbb{N}_{>2}$  so gewählt ist, dass die Teilparkettierung  $T_m$  die Kreisscheibe  $B_r(0)$  überdeckt. Das bedeutet, dass wir für jedes beliebig groß gewählte  $r$  ein hinreichend großes  $m$  finden können, sodass wir durch Inflation die Teilparkettierung  $T_0$  vergrößern können, um die Kreisscheibe  $B_r(0)$  zu überdecken. Mit dem Ausdehnungstheorem 3.9 folgt nun, dass eine Parkettierung mit den Protokacheln  $\{K, D\}$  auf der unendlichen Ebene existiert.  $\square$

*Bemerkung 3.11.* Es kann in diesem Beweis auch mit einer anderen Teilparkettierung  $T_0$  als der gewählten Kachel  $K$  begonnen werden, zum Beispiel mit einer Kopie der Protokachel  $D$  oder einer der sieben möglichen Anordnungen um einen Punkt aus Satz 2.23.

**Beispiel 3.12.** Wir veranschaulichen diesen Beweis am Beispiel der Sonne. Diese Bildsequenz<sup>1</sup> zeigt die ersten fünf Dekompositionen der Sonne, aus technischen Gründen wird nicht die Inflation gezeigt.

<sup>1</sup>Die Bilder wurden auf der Grundlage des TikZ-Codes von [Gab12] erstellt. Hier liegt ein dritter Dekompositionsbegriff vor: Es werden nicht alle Dreiecke  $\triangle A$  und  $\triangle B$  zu Kacheln  $K$  und  $D$  ergänzt, sondern die Hälfte. Die andere Hälfte wird entfernt und gehört nicht mehr zur Teilparkettierung.

Die Kacheln  $K$  und  $D$ , aus denen die Teilparkettierungen gelegt werden, unterliegen den Anlegeregeln, die in Abschnitt 2.2.1 vorgestellt wurden, auch wenn diese Markierungen nicht eingezeichnet sind.

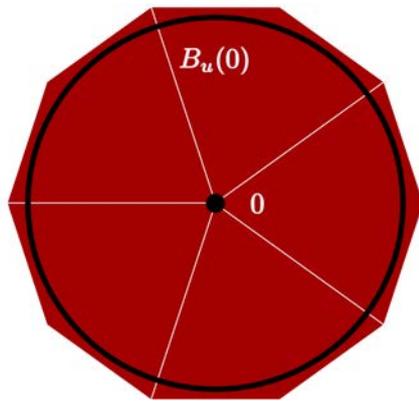


Abbildung 3.2: Teilparkettierung  $T_0$   
(Sonne)

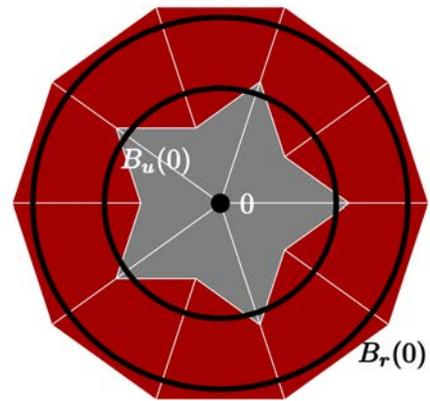


Abbildung 3.3: 1. Durchführung der  
Dekomposition:  $T_1$

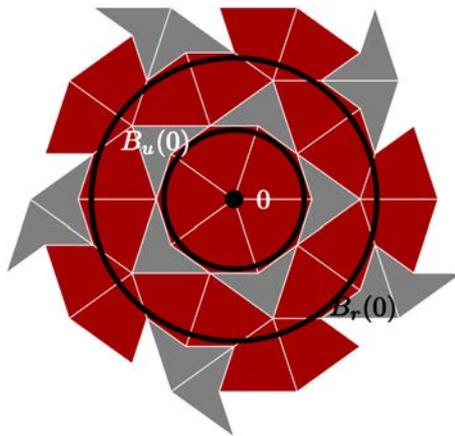


Abbildung 3.4: 2. Durchführung der  
Dekomposition:  $T_2$

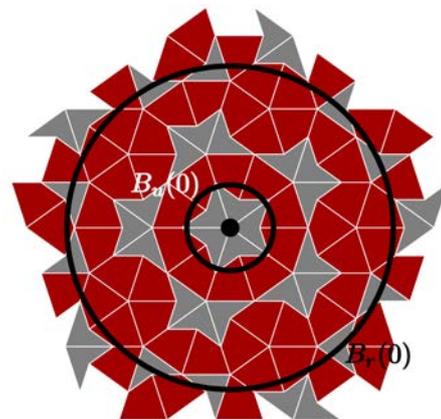


Abbildung 3.5: 3. Durchführung der  
Dekomposition:  $T_3$

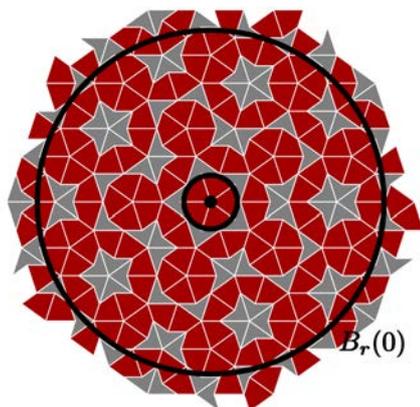


Abbildung 3.6: 4. Durchführung der  
Dekomposition:  $T_4$

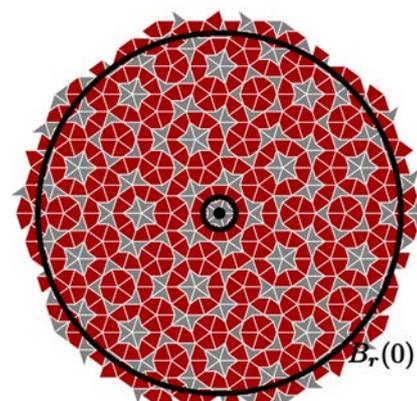


Abbildung 3.7: 5. Durchführung der  
Dekomposition:  $T_5$

Wir legen die Kacheln in Abbildung 3.2 als Kopien der Protokachel  $K$  fest und dadurch die Größe der Kacheln  $K$  und  $D$ . Dann haben die Kacheln in Abbildung 3.3 die Größe  $\frac{1}{\phi}K$  und  $\frac{1}{\phi}D$ , in Abbildung 3.4 die Größe  $\frac{1}{\phi^2}K$  und  $\frac{1}{\phi^2}D, \dots$ , und in Abbildung 3.7 die Größe  $\frac{1}{\phi^5}K$  und  $\frac{1}{\phi^5}D$ . In dieser Bildsequenz ist in jedem Bild eine skalierte Kreisscheibe  $B_u(0)$  zu sehen. Weiterhin ist in jedes Bild eine Kreisscheibe  $B_r(0)$  eingezeichnet, die von der betrachteten Teilparkettierung überdeckt wird. Wenn alle Kacheln auf die Größe der Protokacheln aus Abbildung 3.2 reskaliert werden und damit auch das zugehörige  $r$  mit der entsprechenden Potenz von  $\phi$  multipliziert wird, so wird einsichtig, dass mit wenigen Durchführungen der Inflation Kreisscheiben mit großem Radius überdeckt werden können.

### 3.1.2 Die Aperiodizität der Penrose-Parkettierung auf der Ebene

Die Aperiodizität einer Parkettierung, die mit den Protokacheln  $K$  und  $D$  gelegt wird, können wir ohne weitere Hilfsmittel zeigen. Wir brauchen dazu lediglich das bereits eingeführte Kompositionsverfahren (Algorithmus 2.24).

**Satz 3.13** ([Rit14, Thm. 14]). *Eine Parkettierung mit den Protokacheln  $K$  und  $D$  ist aperiodisch.*

*Beweis.* Wir führen den Beweis nach [Rit14, Bew. Thm. 14] durch Kontraposition. Angenommen, die Aussage stimmt nicht. Dann gibt es eine Parkettierung der Ebene mit den Protokacheln  $\{K, D\}$ , die eine Translationssymmetrie aufweist. Sei die Abbildung  $z \mapsto z + c$  für ein festes  $c \in \mathbb{E} \setminus \{(0, 0)\}$  diese Translation. Wir wählen einen geeigneten Ausschnitt in der Parkettierung und verschieben ihn mit der gegebenen Translation um  $c$ , sodass der erste Ausschnitt und der zweite Ausschnitt sich überlappen (aus diesem Grund muss der Ausschnitt geeignet sein). Da es sich bei der Abbildung  $z \mapsto z + c$  um eine Translationssymmetrie handelt, bei der definitionsgemäß ein Element auf sich selbst abgebildet wird, stimmen die Polygone in der Schnittmenge der beiden Abschnitte überein. Wir wenden den Kompositionsalgorithmus auf den ersten Ausschnitt an. Das bedeutet, dass wir größere Kacheln erhalten, aber weiterhin nahezu dieselbe Fläche parkettiert wird. Als nächstes wird der Kompositionsalgorithmus auf den zweiten Ausschnitt angewandt.

Auch hier erhalten wir größere Kacheln, aber es wird nahezu die gleiche Fläche parkettiert. Die Schnittmenge der beiden Ausschnitte muss auch nach dem Kompositionsvorgang übereinstimmen, da alle Schritte des Algorithmus wohldefiniert und eindeutig sind. Das bedeutet, dass nach der Komposition beide Ausschnitte dieselbe Translationssymmetrie aufweisen.

Wir wenden den Kompositionsalgorithmus auf die gesamte Parkettierung der Ebene mit den Protokacheln  $\{K, D\}$  an. Das ergibt eine neue Parkettierung mit größeren Kacheln  $(\phi K, \phi D)$  statt  $(K, D)$ , aber die Translationssymmetrie  $z \mapsto z + c$  bleibt aufgrund der Eindeutigkeit und Wohldefiniertheit des Kompositionsalgorithmus erhalten, wie im ersten Teil des Beweises erklärt wurde.

Wir wenden den Kompositionsalgorithmus  $N$ -mal auf die gesamte Parkettierung der Ebene an,  $N \in \mathbb{N}$  groß genug. Dann erhalten wir eine Parkettierung mit Protokacheln  $\{\phi^N K, \phi^N D\}$  und der erhaltenen Translationssymmetrie  $z \mapsto z + c$ .

Wenn nun aber  $N$  hinreichend groß und  $c$  hinreichend klein ist, dann führt  $N$ -maliges Durchführen des Kompositionsalgorithmus dazu, dass Kacheln der Größe  $\phi^N K$  (oder  $\phi^N D$ ) sich mit einer anderen Kachel  $\phi^N K$  oder  $\phi^N D$  im Inneren überlappen, denn wie zu Beginn des Beweises erklärt, können Ausschnitte gewählt werden, die mit der Translationssymmetrie verträglich sind und deren Schnitte mit dem Kompositionsalgorithmus beider Ausschnitte verträglich sind. Wenn nun aber die Komposition hinreichend oft durchgeführt wird, werden die Punkte der Schnittmenge bei beiden Ausschnitten „hinzugefügt“ und so entsteht die beschriebene Überlappung im Inneren von zwei Kacheln. Bei einer Parkettierung dürfen sich die Kacheln aber im Inneren nicht überlappen, nur an den Kanten und Eckpunkten. Somit kann es keine Parkettierung mit  $\{K, D\}$  geben, die eine Translationssymmetrie aufweist, die Parkettierung ist aperiodisch.  $\square$

Somit haben wir beide Teilaussagen des Hauptresultates 3.1 bewiesen.

Zum Abschluss dieses Unterkapitels skizzieren wir noch eine alternative Beweisidee der Aperiodizitätsaussage. In dieser wird gezeigt, dass der Limes des Quotienten der Anzahl der verwendeten Kacheln  $K$  und  $D$  auf der Ebene  $\mathbb{E}$  eine irrationale Zahl ist, nämlich der goldene Schnitt  $\phi$ .

Dazu zeigen wir zunächst ein Hilfsresultat und skizzieren dann den Beweis nach

der Vorlage von Penrose:

**Lemma 3.14.** *Die Dekomposition eines Drachens  $K$  ergibt mengentheoretisch zwei Kacheln  $\frac{1}{\phi}K$  und eine Kachel  $\frac{1}{\phi}D$ , während die Dekomposition eines Pfeils  $D$  eine Kachel  $\frac{1}{\phi}K$  und eine Kachel  $\frac{1}{\phi}D$  ergibt.*

*Beweis.* Wir wenden den Dekompositionsalgorithmus zunächst auf die Protokachel  $\phi K$  an, um eine leichtere Notation während des Beweises zu erhalten. Aufgrund der Eindeutigkeit des Algorithmus erhält man zunächst zwei Kacheln  $\phi A'$ , die jeweils zu einer Kachel  $\phi B'$  und einer Kachel  $\triangle A$  zerlegt werden. Die Kachel  $\phi B'$  wird jeweils noch zu einer Kachel  $\triangle A$  und einer Kachel  $\triangle B$  zerlegt. Mengentheoretisch kann folglich die Protokachel  $K$  zerlegt werden in vier Kacheln  $\triangle A$  und zwei Kacheln  $\triangle B$ .

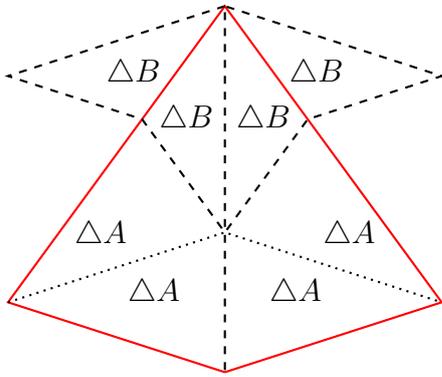


Abbildung 3.8: Dekomposition des Drachens  $K$

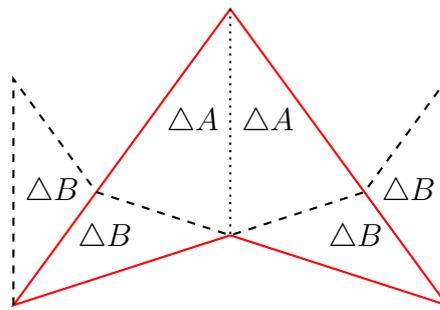


Abbildung 3.9: Dekomposition des Pfeils  $D$

Das entspricht einer - mengentheoretischen - Zerlegung der Protokachel  $\phi K$  in zwei Kacheln  $K$  und eine Kachel  $D$ . Da die Dreiecke  $\triangle B$  mit ihrer langen Seite aneinandergrenzen, weisen sie zusammengenommen nicht die Form der Kachel  $D$  auf. Durch eine Reskalierung mit  $\frac{1}{\phi}$  erhalten wir die Behauptung. Für die Protokachel  $D$  folgt die Argumentation analog – wir erhalten durch den Dekompositionsalgorithmus je zwei Kacheln  $\triangle A$  und zwei Kacheln  $\triangle B$ , was mengentheoretisch einem Drachens  $K$  und einem Pfeil  $D$  entspricht.  $\square$

Das folgende Resultat inklusive seiner Beweisskizze sind in [Pen79, S. 36] zu finden.

**Lemma 3.15.** *Sei  $\mathcal{T}$  eine Parkettierung mit der Protokachelmenge  $\{K, D\}$ . Dann entspricht das Verhältnis von  $\#K$  zu  $\#D$  dem Goldenen Schnitt  $\phi$ .*

*Beweisskizze.* Sei  $k$  die Anzahl der verwendeten Drachen  $K$  und  $d$  die Anzahl der verwendeten Pfeile  $D$ . Eine Parkettierung der Euklidischen Ebene entsteht nach Satz 3.10 durch  $n$ -fache Anwendung der Inflation, wobei  $n \rightarrow \infty$ .

Nach Lemma 3.14 wird ein Drachen zu zwei Drachen und einem Pfeil und ein Pfeil zu einem Drachen und einem Pfeil dekomponiert, somit folgt:

$$k = 1d + 2k$$

$$d = 1d + 1k$$

bzw. als Verhältnis

$$\frac{k}{d} = \frac{1d + 2k}{1d + 1k}. \quad (3.1)$$

Anwenden der Dekomposition bzw. Inflation entspricht bei diesen Gleichungen einem rekursiven Einsetzen. Seien  $k'$  und  $d'$  die Anzahl nach einer Anwendung der Dekomposition, so gilt:

$$\frac{k'}{d'} = \frac{1(1d + 1k) + 2(1d + 2k)}{1(1d + 1k) + 1(1d + 2k)} = \frac{3d + 5k}{2d + 3k}.$$

Wir erkennen in dieser Gleichung die Folgenglieder der Fibonacci-Folge, deren Limes der Goldene Schnitt ist.

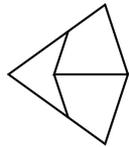
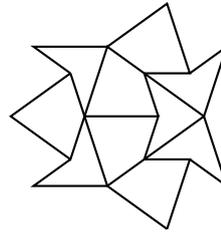
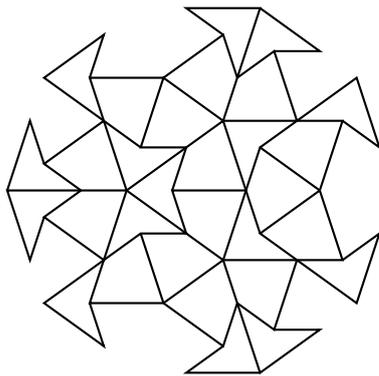
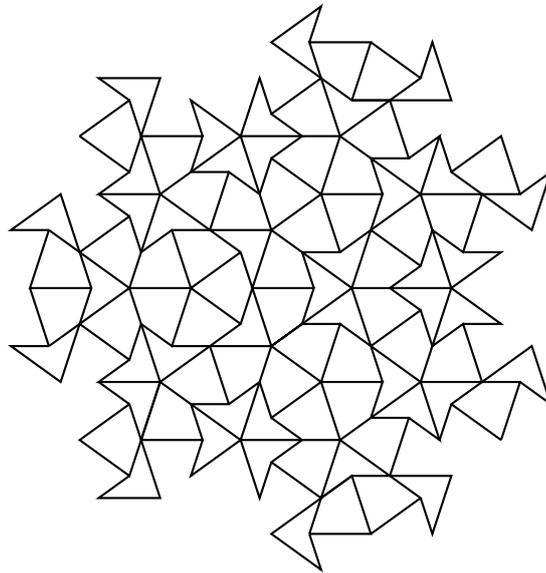
Wir lösen die Gleichung 3.1 und setzen  $x := \frac{k}{d}$ :

$$x = \frac{1d + 2k}{1d + 1k} = \frac{1 + 2\frac{k}{d}}{1 + 1\frac{k}{d}} = \frac{1 + 2x}{1 + 1x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Der Goldene Schnitt  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$  ist die positive Lösung dieser Gleichung. □

## 3.2 Die Wagenrad-Parkettierung

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit Symmetrieeigenschaften der Penrose-Parkettierung. Da die Penrose-Parkettierung aperiodisch ist (s. Abschnitt 3.1.2), ist es um so erstaunlicher, welche Symmetrieeigenschaften zu finden sind, es lässt sich nämlich – anschaulich gesprochen – eine abgeschwächte Form der Translationsymmetrie nachweisen. In diesem Abschnitt spielt eine bestimmte Folge von Teilparkettierungen eine entscheidende Rolle, die Folge der *Wagenräder* [Rit14, Abschn. 8]. Diese Folge ist rekursiv definiert: Wir setzen als  $C_0$  die Teilparkettierung Ass fest und als  $C_n$  die Parkettierung, die durch Anwendung der Inflation auf die Teilparkettierung  $C_{n-1}$  entsteht für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Abbildung 3.10: Wagenrad  $C_0$  (Ass)Abbildung 3.11: Wagenrad  $C_1$ Abbildung 3.12: Wagenrad  $C_2$ Abbildung 3.13: Wagenrad  $C_3$ 

Da der in dieser Arbeit vorgestellte Dekompositionsbegriff von Ritters abweicht

(vgl. Bemerkung 2.25), stimmen die Abbildungen in [Rit14, Abschn. 8] und die in diesem Abschnitt nicht vollständig überein.

Jede der Abbildungen entsteht durch Anwendung der Inflation auf die vorherige. Wenn wir die Teilparkettierung  $C_2$  in Abbildung 3.12 mit weiteren Kopien der Protokachel  $K$  ergänzt hätten, sodass diese nahezu rund wäre, so wären auch alle folgenden Abbildungen nahezu rund, was die Namensgebung des Wagenrads erklärt. Da dies allerdings nicht in Einklang mit unserem Dekompositionsbegriff steht, verzichten wir auf diese Ergänzung.

Des Weiteren weisen wir darauf hin, dass die in Abschnitt 2.2.1 eingeführten Anlegeregeln auch in diesem Abschnitt gültig sind, auch wenn wir in den Abbildungen auf die Markierungen der Anlegeregeln zur besseren Übersicht verzichten. Da der Fokus auf den vorhandenen Symmetrieeigenschaften liegt, sollen die Markierungen nicht ablenken. Die Anlegeregeln werden dennoch vollumfänglich beachtet. In der Teilfolge der Wagenräder lässt sich bereits eine Art von Wiederholung feststellen, diese soll im folgenden Lemma formuliert werden:

**Lemma 3.16.** (a) Sei  $C_n$  eine Teilparkettierung aus der Folge der Wagenräder wie oben angegeben. Dann gilt  $C_n \subseteq C_{n+2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Sei  $C'_n$  die vertikal gespiegelte Teilparkettierung  $C_n$ . Dann gilt  $C' \subseteq C_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* (a) Wir führen diesen Beweis durch vollständige Induktion nach  $n$ :

**Induktionsanfang:** Wir geben für  $n = 0$  den Induktionsanfang mit Bildern an:

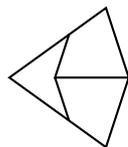


Abbildung 3.14:  $C_0$  (Ass)

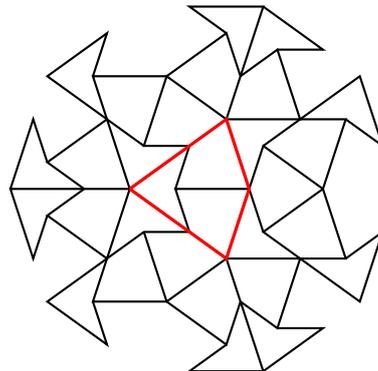


Abbildung 3.15:  $C_2$

Offenbar ist das Ass, das heißt  $C_0$ , in der Teilparkettierung  $C_2$  enthalten.

**Induktionsvoraussetzung:** Es gelte  $C_n \subseteq C_{n+2}$  für ein festes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Induktionsschritt:** Wir setzen  $C_n \subseteq C_{n+2}$  voraus und zeigen  $C_{n+1} \subseteq C_{n+3}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da durch den Dekompositionsvorgang die Parkettierung größer wird, ist  $C_n$  eine echte Teilmenge von  $C_{n+2}$ , das bedeutet  $C_n \subsetneq C_{n+2}$  und damit ist  $C_n \cap C_{n+2} = C_n$ . Nun verwenden wir die Eindeutigkeit der Dekomposition: Analog zum Beweis 3.1.2 der Aperiodizität muss die Dekomposition angewandt auf den Schnitt von  $C_n$  und  $C_{n+2}$  dasselbe Ergebnis liefern. Ebenfalls aufgrund der Eindeutigkeit verändert sich die Dekomposition des Schnittes auch nicht, wenn die gesamte Fläche  $C_{n+2}$  dekomponiert wird. Damit ist die Dekomposition von  $C_n$  in  $C_{n+2}$  enthalten, somit folgt  $C_{n+1} \subseteq C_{n+3}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (b) Dieser Beweis verläuft analog zu (a). Wir geben daher nur den Induktionsanfang für  $n = 0$  an:

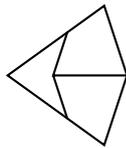


Abbildung 3.16:  $C_0$  (Ass)

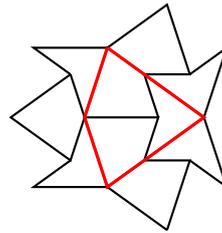


Abbildung 3.17:  $C_1$  (Batman)

Offenbar ist das Ass, das heißt  $C_0$ , vertikal gespiegelt in dieser Teilparkettierung enthalten. □

Die Folge  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt nach dem obigen Lemma 3.16 zwei Teilfolgen:  $(C_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(C_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Nach dem Ausdehnungstheorem 3.9 wissen wir, dass beide Teilfolgen eine Parkettierung der Ebene  $\mathbb{E}$  bilden (vgl. dazu auch Beispiel 3.12). Wir setzen  $C := \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n}$  und nennen diese Parkettierung der Ebene die *Wagenradparkettierung* [Rit14, S. 22].

Mit dem folgenden Lemma stellen wir eine Beziehung zwischen den Wagenrädern  $C_{2n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und anderen Penrose-Parkettierungen mit  $K$  und  $D$  her. Der

Beweis des Lemmas orientiert sich an den Beweisen von [GS16, Thm. 10.5.2] und [Rit14, Thm. 15].

**Lemma 3.17** ([GS16, Thm. 10.5.2]). *Sei  $\mathcal{T}$  eine Parkettierung von  $\mathbb{E}$  mit der markierten Protokachelmenge  $\{K, D\}$  und  $T \in \mathcal{T}$  eine Kachel. Dann liegt  $T$  in einem Wagenrad  $C_{2n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Sei  $P \in T \subseteq \mathcal{T} \cong \mathbb{E}$  ein Punkt in der Kachel  $T$ . Wir zeigen zuerst, dass  $T$  immer Teil eines Asses ist:

**Fall 1:**  $T$  ist isomorph zur Protokachel  $D$ . Wir betrachten explizit den Winkel der Größe  $6\alpha$ . Wie im Beweis von Satz 2.23 in den Fällen 1-4 bereits gezeigt wurde, ist nur der Fall 4 eine mögliche Legemöglichkeit, diese ist gerade das Ass.

**Fall 2:**  $T$  ist isomorph zur Protokachel  $K$ . Es kann höchstens an eine der beiden Seiten mit Länge  $\phi$  eine Kachel  $D$  gelegt werden, denn angenommen an beide Seiten würde eine Kachel  $D$  gelegt werden, so könnte keine Parkettierung ohne Überschneidung entstehen:

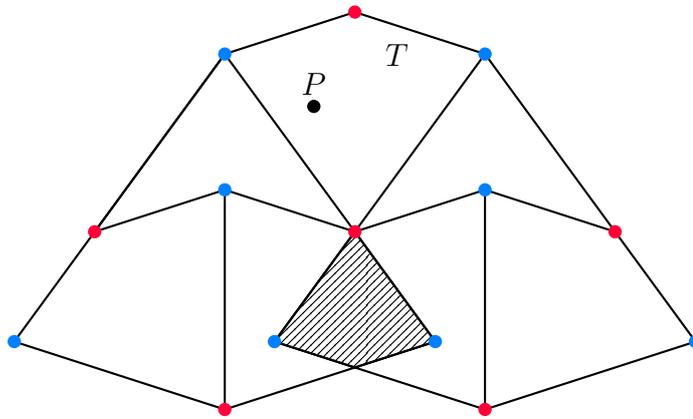


Abbildung 3.18: Invalide Anlegemöglichkeit

Wie wir in Fall 1 gesehen haben, müssen an die beiden Pfeile jeweils Drachen gelegt werden. Das ist aber nicht ohne Überschneidungen möglich (schraffierte Fläche in Abbildung 3.18), und somit kann keine Parkettierung mehr gelegt werden. Damit dieser Fall nicht auftritt, muss an mindestens eine Seite der Länge  $\phi$  eines Drachen ein weiterer Drachen gelegt werden. Falls, in Einklang mit den

Anlegeregeln, an die Seiten der Länge 1 ein Pfeil anschließt, entsteht ein Ass und die Aussage ist bewiesen. Es kann jedoch zusätzlich zum Drachen an der langen Seite an eine der Seiten mit Länge 1 ein weiterer Drachen gelegt werden (wie z.B. bei der Königin, Abbildung 2.13).

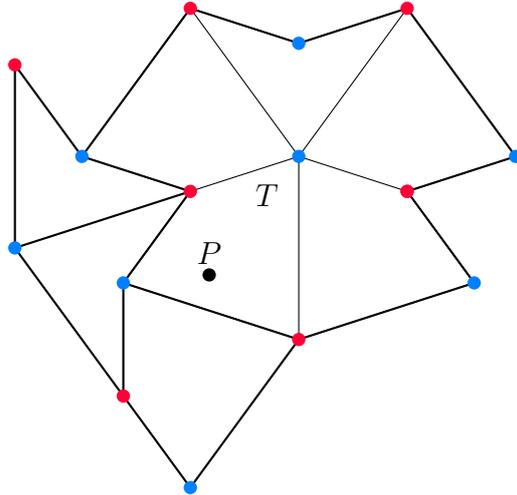


Abbildung 3.19: Forcierte Anlegemöglichkeiten an die Königin

Dann muss an die verbliebene Seite der Länge 1 von  $T$  ein Pfeil gelegt werden, um eine Parkettierung zu erhalten. Es ist nicht möglich, einen Drachen an diese Stelle zu legen (vgl. Beweis von Satz 2.23 Fall 5). Nach Fall 1 muss dann an die andere Seite des Pfeils der Länge 1 ein weiterer Drachen gelegt werden, sodass ein Ass entsteht.

Wir wenden  $2n$ -mal für ein festes  $n \in \mathbb{N}$  den Kompositionsalgorithmus auf die Parkettierung  $\mathcal{T}$  an, die so entstehende Parkettierung bezeichnen wir als  $\mathcal{T}_{2n}$ . Der Punkt  $P$  liegt dann in einer Kachel  $\phi^{2n}K$  oder  $\phi^{2n}D$ , die nach dem ersten Teil des Beweises zu einem Ass gehört. Wir bezeichnen dieses Ass mit  $A$ . Wir wenden  $2n$ -mal den Dekompositionsalgorithmus auf die Parkettierung  $\mathcal{T}_{2n}$  an, insbesondere gilt  $A \subseteq \mathcal{T}_{2n}$ . Da nach Festlegung die Folge der Wagenradparkettierungen aus der Dekomposition eines Asses entstehen, erhalten wir somit auf der Fläche  $A$  das Wagenrad  $C_{2n}$ . Da die Komposition und die Dekomposition eindeutig sind, erhalten wir auch die Parkettierung  $\mathcal{T}$  mit den Protokacheln  $\{K, D\}$  zurück. In dieser Parkettierung liegt wie zu Beginn die Kachel  $T$  mit  $P \in T$ , da die Komposition und Dekomposition die Orientierung einer Kachel in der Ebene nicht verändern.

Aufgrund des Gezeigten gilt somit die Behauptung, dass eine Kachel aus einer Parkettierung in einem Wagenrad  $C_{2n}$  enthalten ist.  $\square$

Der folgende Satz trifft eine Aussage über die Wiederholungen der sieben Anlegemöglichkeiten. Sein Beweis folgt [Rit14, Bew. Thm. 17].

**Satz 3.18** ([Rit14, Thm. 18]). *Die sieben Ausschnitte aus Satz 2.23 kommen in jeder Parkettierung, die mit Pfeil und Drachen gelegt wird, unendlich häufig vor.*

*Beweis.* Nach Lemma 3.17 kommt jede Kachel aus einer beliebigen Parkettierung mit  $K$  und  $D$  in jedem Wagenrad vor, insbesondere im Wagenrad  $C_4$ .

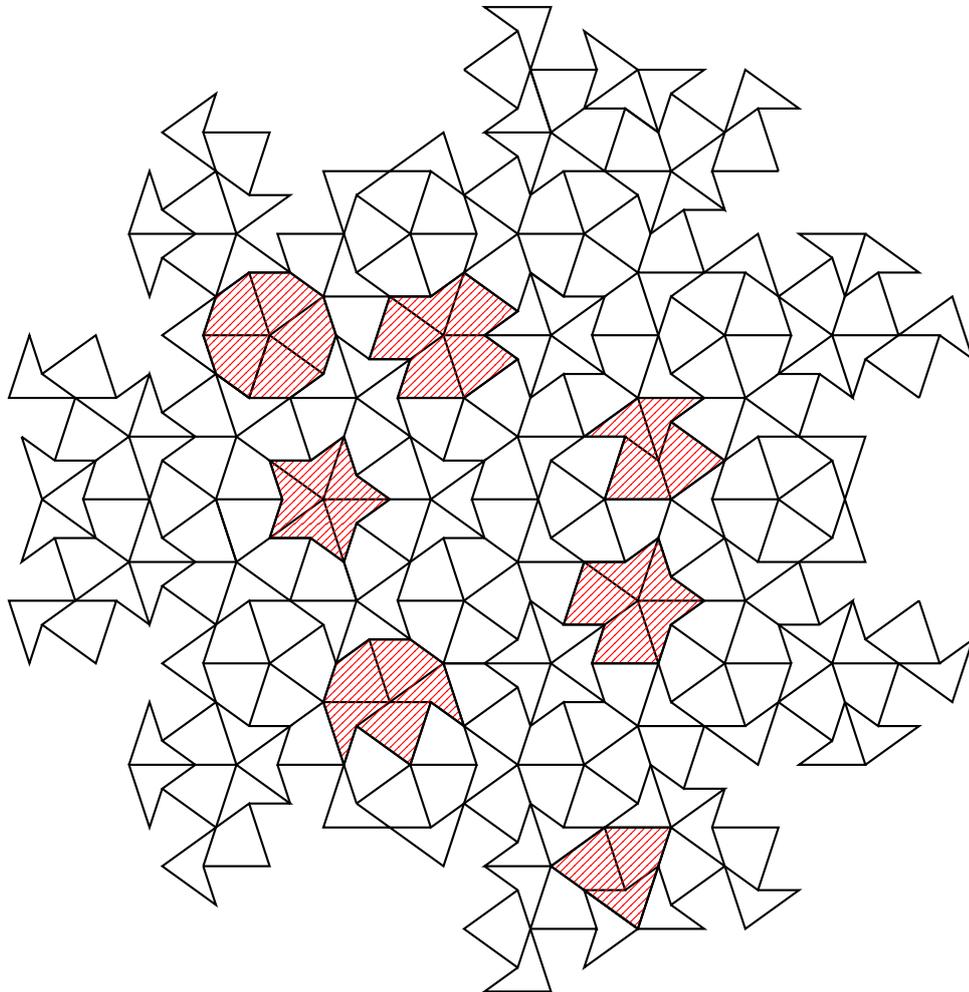


Abbildung 3.20: Wagenrad  $C_4$  mit den markierten sieben Figuren aus Satz 2.23

Wie die Abbildung 3.20 zeigt, kommt jede der sieben Möglichkeiten in diesem Wagenrad vor. Damit folgt direkt die Aussage.  $\square$

**Korollar 3.19.** *In jeder Parkettierung  $\mathcal{T}$ , die mit den Protokacheln  $\{K, D\}$  gelegt wird, kommen unendlich viele Kopien von beiden Protokacheln vor.*

*Beweis.* Da die sieben möglichen Anordnungen um einen Eckpunkt zusammengekommen Kopien von beiden Protokacheln  $K$  und  $D$  aufweisen und nach Satz 3.18 diese möglichen Anordnungen unendlich häufig in jeder Parkettierung vorkommen, kann die Anzahl der Kopien einer der beiden Protokacheln nicht endlich sein.  $\square$

Der folgende Satz und sein Korollar formulieren die Symmetrie, die unter Verschiebung und Rotation in einer Penrose-Parkettierung existiert.

**Satz 3.20** ([Rit14, Thm. 18]). *Sei  $\mathcal{T}$  eine Parkettierung mit der markierten Protokachelmenge  $\{K, D\}$  und  $R \subseteq \mathcal{T}$  ein endlicher Ausschnitt aus dieser Parkettierung. Dann gibt es unendlich viele Wiederholungen von  $R$  in der Parkettierung  $\mathcal{T}$ , wobei  $R$  verschoben und rotiert werden darf.*

*Beweis.* Wir führen den Beweis nach [Rit14, Bew. Thm. 18]. Sei  $\mathcal{T}$  die vorgegebene Parkettierung. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{T}^n$  die Parkettierung, die durch  $n$ -fache Anwendung der Komposition auf  $\mathcal{T}$  entsteht und mit  $\{\phi^n K, \phi^n D\}$  die zugehörige Protokachelmenge, wobei  $n \in \mathbb{N}$  geeignet. Wir wählen die Anzahl der durchgeführten Kompositionen  $n$  groß genug, sodass einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:  
**Fall 1:** Der Ausschnitt  $R$  kann so kompositiert werden, dass die Kopie einer Protokachel  $\phi^n K$  oder  $\phi^n D$  entsteht, das heißt, dass  $R$  im Inneren der Kopie einer Protokachel  $\phi^n K$  oder  $\phi^n D$  liegt. Ohne Einschränkung gehen wir davon aus, dass  $R$  zum Inneren einer Kopie von  $\phi^n D$  kompositiert werden kann. Wir betrachten eine weitere Kopie von  $\phi^n D$ . Aufgrund der Eindeutigkeit von Komposition und Dekomposition muss dann nach  $n$ -facher Anwendung der Dekomposition auf  $\mathcal{T}'$  – wodurch die Parkettierung  $\mathcal{T}$  entsteht – der Ausschnitt  $R$  an dieser Stelle entstehen. Dies gilt für alle weiteren Kopien der Protokachel  $\phi^n D$ , von denen es nach Korollar 3.19 unendlich viele in jeder Parkettierung gibt.

**Fall 2:** Nach  $n$ -maliger Anwendung der Komposition liegt  $R$  nicht im Inneren der Kopie einer Protokachel. Dann schneidet  $R$  eine Ecke oder Kante, das heißt  $R$

liegt im Inneren von einer der sieben möglichen Anordnungen um einen Eckpunkt (vgl. Satz 2.23). Nach Satz 3.18 kommen diese unendlich häufig in jeder Parkettierung vor, demnach auch in der Parkettierung  $T'$ . Nach  $n$ -facher Anwendung der Dekomposition erhalten wir folglich wieder den Ausschnitt  $R$ .  $\square$

**Korollar 3.21** ([Rit14, Thm. 18]). *Seien  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  Parkettierungen mit der markierten Protokachelmengemenge  $\{K, D\}$  und  $R \subseteq \mathcal{T}$  ein endlicher Ausschnitt aus dieser Parkettierung. Dann gibt es unendlich viele Wiederholungen von  $R$  in  $\mathcal{T}'$ , wobei  $R$  verschoben und rotiert werden darf.*

*Beweis.* Wir führen den Beweis nach [Rit14, Bew. Thm. 18]. Da wir in dem obigen Beweis keine speziellen Eigenschaften der Parkettierung  $\mathcal{T}$  verwandt haben, können wir nach der  $n$ -fachen Komposition auch Kopien der Protokacheln  $\phi^n K$  oder  $\phi^n D$  oder einer der sieben möglichen Anordnungen um einen Punkt in einer von  $\mathcal{T}$  verschiedenen Parkettierung  $\mathcal{T}'$  betrachten und erhalten dort nach  $n$ -facher Dekomposition mit demselben Argument wie im obigen Beweis den Ausschnitt  $R$ .  $\square$

Diese letzten beiden Aussagen sind äußerst bemerkenswert. Wir haben gezeigt, dass jeder beliebig große, aber endliche Ausschnitt aus einer beliebigen *aperiodischen* Parkettierung mit Drachen und Pfeil unendlich häufig in jeder Parkettierung mit Drachen und Pfeil auftritt. Mit dem Satz von Conway kann sogar noch angegeben werden, wie weit entfernt die nächste Kopie des Ausschnitts  $R$  ist [Gar89, S. 10]: Sei  $d$  der Durchmesser von  $R$ , dann beträgt der Abstand von  $R$  zur nächsten Kopie gemessen vom Rand höchstens  $d \cdot \frac{\phi^3}{2}$ . Diese Angabe ist kein Durchschnittswert, sondern eine obere Grenze. In [Gar89, S. 10] wird dieses Phänomen mit dem Beispiel einer Landkarte veranschaulicht: Man stelle sich vor, man lebe in einer Stadt  $R$ , gebaut aus Drachen und Pfeilen. Wenn man eines Tages aus unerklärlichen Gründen aus seiner Heimatstadt in ein anderes „Penrose-Universum“, das heißt eine andere Parkettierung mit Drachen und Pfeilen, transportiert wird, so muss man nur  $d \cdot \frac{\phi^3}{2}$  weit in die richtige Richtung laufen, um zu einer exakten Kopie der Heimatstadt zu gelangen. In einer Penrose-Parkettierung sei man immer sehr nah an einem Duplikat seines Zuhauses.

Aufgrund der Aperiodizität der Parkettierung ist diese Regelmäßigkeit ein unerwartetes Resultat. In [Gar89, S. 10] wird darauf hingewiesen, dass z.B. bezüglich der berühmten Kreiszahl  $\pi$  keine solche Regelmäßigkeit aufzufinden sei.

## KAPITEL 4

---

### Resümee und Ausblick

---

Wir haben in dieser Arbeit, nachdem in Abschnitt 2.1 mit elementaren Definitionen die Grundlage für die Arbeit gelegt wurde, in Abschnitt 2.2.1 die markierten Kacheln Drachen und Pfeil eingeführt und in Abschnitt 2.2.2 gezeigt, dass es genau sieben Möglichkeiten gibt, Drachen und Pfeil um einen Eckpunkt anzuordnen. Das bedeutet, es ist möglich, mit Drachen und Pfeil kleine Flächen zu überdecken. In Abschnitt 2.3 haben wir dieses Resultat dahingehend erweitert, dass mithilfe des Inflationsalgorithmus auch größere Teilparkettierungen der Ebene  $\mathbb{E}$  mit Drachen und Pfeil möglich sind. Um den Inflationsalgorithmus angeben zu können, haben wir zuerst die Komposition und ihre Umkehrung, die Dekomposition, betrachtet. Eine Übersicht über die Verfahren und ihre Zusammenhänge wurde in Abschnitt 2.3.2 gegeben. Mithilfe des Inflationsalgorithmus und anderer Resultate, insbesondere des Ausdehnungstheorems, konnten wir in Abschnitt 3.1.1 die Existenz einer Parkettierung der Ebene  $\mathbb{E}$  mit den markierten Kacheln Drachen und Pfeil nachweisen (Satz 3.10). Der Kompositionsalgorithmus spielte eine wesentliche Rolle beim Aperiodizitätsbeweis (Satz 3.13), wobei für diese Aussage noch eine alternative Beweisidee gegeben wurde. Somit konnte die Forschungsfrage beantwortet werden: Eine aperiodische Überdeckung der Euklidischen Ebene  $\mathbb{E}$  existiert. Des Weiteren konnte in Abschnitt 3.2 eine Aussage über Verschiebungen und Wiederholungen von

endlichen Ausschnitten in Penrose-Parkettierungen getroffen werden. Wir konnten mit Satz 3.20 und Korollar 3.21 zeigen, dass ein beliebig großer, aber endlicher Ausschnitt aus einer Parkettierung unendlich häufig in dieser Parkettierung und in jeder anderen Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil erscheint. Aufgrund der vorher bewiesenen Aperiodizitätsaussage sind diese Resultate höchst bemerkenswert.

Wir werden im Weiteren einen auf Ausblick einige Resultate geben, die im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden konnten.

Es können unter anderem zwei Symmetrien in der Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil festgestellt werden: Man sieht leicht, dass die beiden Anordnungen um einen Eckpunkt Sonne und Stern (Abbildungen 2.8 und 2.9) jeweils fünf Symmetrieachsen besitzen und beide eine Drehsymmetrie um  $2\alpha$  aufweisen. Diese Symmetrien bleiben erhalten, wenn auf die beiden Anordnungen die Inflation angewandt wird und so eine Penrose-Parkettierung auf der Euklidischen Ebene entsteht [Gar89, S.11]. In Beispiel 3.12 wird dies veranschaulicht, da die Inflation auf die Sonne angewandt wird. Hier ist ebenfalls gut zu sehen, dass Sonnen- und Sternparkettierung ineinander übergehen [Gar89, S. 11].

Des Weiteren könnte man sich mit der Anzahl der Penrose-Parkettierungen beschäftigen, während wir im Existenzbeweis gezeigt haben, wie eine Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil entstehen kann: Man beginnt mit einer der beiden Kacheln  $K$  oder  $D$  oder einer der sieben Anlegemöglichkeiten und wendet dann  $n$ -mal mit  $n \rightarrow \infty$  die Inflation auf diese Teilparkettierung an. Tatsächlich gibt es überabzählbar unendlich viele Penrose-Parkettierungen. Es gibt sogar eine Bijektion zwischen  $\mathbb{R}$  und der Menge der verschiedenen Parkettierungen [Rit14, Thm. 28]. Eine Beweisidee hierzu ist in [Gar89, S. 9] zu finden.

Weiterhin haben wir uns in dieser Arbeit auf die beiden Kacheln Drachen und Pfeil beschränkt. Ebenfalls als Penrose-Parkettierung bekannt ist eine Parkettierung mit einer Protokachelmenge bestehend aus zwei Rauten [Pen79, S. 36]. Diese zweielementige Menge von Protokacheln ist mit den abgebildeten Markierungen und den zugehörigen Anlegeregeln ebenfalls aperiodisch.

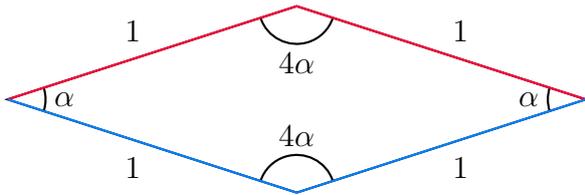


Abbildung 4.1: Dünne Raute

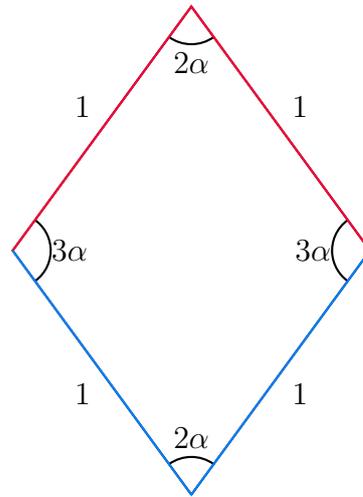


Abbildung 4.2: Dicke Raute

Sie hängt eng mit den von uns untersuchten Protokacheln Drachen und Pfeil zusammen: Für die Protokachelmenge der Rauten kann ebenfalls ein Algorithmus der Komposition und Dekomposition definiert werden, der analog zu dem in dieser Arbeit vorgestellten arbeitet. Wenn nun die Komposition oder Dekomposition auf eine Teilparkettierung gelegt mit Drachen und Pfeil angewandt wird, so erscheinen bei den Zwischenschritten die beiden Rauten und umgekehrt werden bei der Komposition und Dekomposition der Rauten auch Drachen und Pfeil sichtbar. Man kann also sagen, dass die beiden Protokachelmengen bzw. die Parkettierungen, die mit ihnen gelegt werden, ineinander übergehen. Das lässt sich damit begründen, dass auch die beiden Rauten in Kacheln vom Typ  $\triangle A$  und  $\triangle B$  zerlegt werden können, denn je nachdem, wie diese im Algorithmus zusammengesetzt werden, erhält man eine Parkettierung mit Drachen und Pfeil oder mit Rauten. Dieser Zusammenhang wird in [GS16] genauer untersucht und die Rauten-Parkettierung wird z.B. in [Beh12] behandelt.



## KAPITEL 5

---

### Aperiodische Parkettierungen – Eine Abstraktion zum klassischen Geometrieunterricht

---

In diesem Kapitel wird eine Möglichkeit vorgestellt, die Penrose-Parkettierung mit Drachen und Pfeil mit Schüler\*innen zu untersuchen.

Parkettierungen im Allgemeinen müssen nicht im Unterricht besprochen werden [Min04], [Min16a], [Min16b], wenn sie behandelt werden, dann meistens in den unteren Klassenstufen. Die Mathematik-Didaktiker Weigand et al. schlagen die Penrose-Parkettierung explizit für die Untersuchung aperiodischer Parkettierungen vor [WFH<sup>+</sup>18, S. 193]. Ihre Begründung für die Behandlung von Parkettierungen allgemein im schulischen Kontext lautet, dass anhand dieser Thematik das mathematische Problemlösen trainiert werden kann. Problemlösen ist eine der fünf Kompetenzen des gymnasialen Bildungsplans 2016 [Min16a, S. 12].

Aus diesem Grund eignet sich dieses Thema sehr gut für eine Mathematik-AG: Es kann das mathematische Problemlösen anhand eines echten mathematischen Gegenstandes trainiert werden, ohne auf ein Thema zurückzugreifen, das eigentlich Unterrichtsstoff wäre.

Aperiodische Parkettierungen dürften für die Schüler\*innen etwas vollkommen

Neues sein. Daher ist der mathematische Gehalt und die Komplexität dieses Themas sehr hoch und es bedarf einer angemessenen didaktischen Reduktion.

Von den Schüler\*innen wird nicht erwartet, dass sie die Beweise, die in dieser Arbeit vorgelegt wurden, nachvollziehen geschweige denn selbstständig führen können. Das Ziel der folgenden Skizzierung<sup>1</sup> ist es, dass die Schüler\*innen die Aperiodizität der Parkettierung heuristisch nachzuvollziehen und ausgehend davon selbst die Frage stellen, wie groß eine solche Parkettierung werden kann, also ob eine solche Parkettierung denn auf der Ebene  $\mathbb{E}$  existiert. Auf der fachlichen Ebene stecken also die beiden Teile des Hauptsatzes 3.1 dahinter.

Wenn dieses Thema mit Schüler\*innen behandelt wird, so bietet es sich aufgrund der Anschaulichkeit an, die Schüler\*innen selbst Teilparkettierungen mit Kopien von markierten Protokacheln Drachen und Pfeil legen zu lassen. Dazu benötigt man Sets von markierten Kacheln, wobei die Darstellung der Markierungen der Anlegeregeln dahingehend modifiziert werden sollte, dass sie deutlicher hervortreten als in der bisherigen Arbeit:

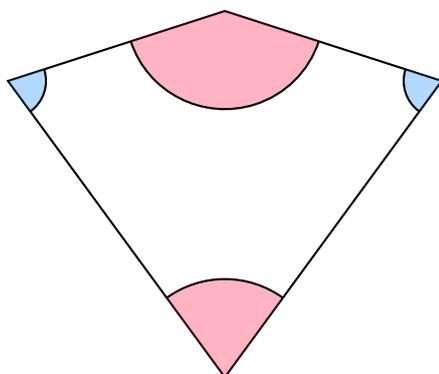


Abbildung 5.1: Markierter Drachen  
(Vorlage für Schüler\*innen)

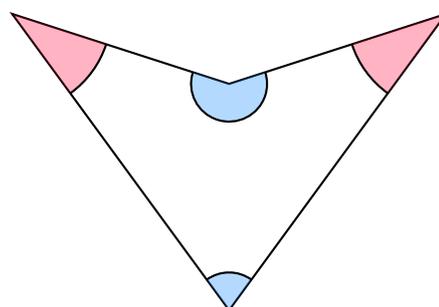


Abbildung 5.2: Markierter Pfeil (Vorlage für Schüler\*innen)

Um die Schüler\*innen an die Thematik heranzuführen, sollen sie als erste Aufga-

---

<sup>1</sup>Die folgende Ausführung ist kein vollständiger Unterrichtsentwurf, sondern nur eine Skizzierung möglicher Aufgabenstellungen mit Rückbezügen zur fachlichen Ebene. Daher werden keine Unterrichtsphasen beschrieben.

be kleinflächige Teilparkettierungen mit Drachen und Pfeil selbst legen, genauer sollen sie ausprobieren, wie viele und welche Möglichkeiten es gibt, Drachen und Pfeil um einen Eckpunkt anzuordnen. Bei der Lösung dieser Aufgabe wenden die Schüler\*innen heuristische Strategien des Problemlösens an [BC11, S. 69], indem sie systematisch probieren. Während der Bearbeitung dieser Aufgabe vollziehen die Schüler\*innen die Idee des Beweises von Satz 2.23 nach.

Wenn die Schüler\*innen mit den Kacheln  $K$  und  $D$  vertraut sind und kleinflächige Parkettierungen gelegt haben, gibt es zwei Möglichkeiten, die Aperiodizität zu thematisieren: Man kann entweder die Schüler\*innen auffordern, nun gemeinsam mit ihren Sets, mit denen sie die kleinflächigen Parkettierungen gelegt haben, eine große Parkettierung zu legen und die Schüler\*innen ab einem gewissen Punkt nach möglichen Translationssymmetrien suchen zu lassen. Oder man kann den Schüler\*innen eine nicht-eingefärbte Penrose-Parkettierung (ohne Markierung der Anlegeregeln) geben und sie auffordern, alle Sterne (vgl. Satz 2.23) anzumalen. Danach sollen die Schüler\*innen beurteilen, ob es möglich ist, einen „Stern“ auf einen anderen zu verschieben und falls ja, ob es gleichzeitig mit zwei Sternen möglich ist usw. Die Schüler\*innen werden auf diesem Weg zu einem Widerspruch kommen. Man kann den gleichen Prozess noch mit der „Sonne“ durchführen und kommt auch hier zu dem Ergebnis, dass keine Translationssymmetrie entdeckt werden kann (da allerdings wegen Lemma 3.15 mehr Sonnen als Sterne in einer Parkettierung zu finden sind, ist hier der Effekt nicht so offensichtlich).

Aufgrund der Komplexität des Themas scheint an dieser Stelle kein deutlicherer Rückbezug zur Beweisstruktur von Satz 3.13 möglich zu sein, da der Algorithmus aus Abschnitt 2.3 für die Zielgruppe zu schwer ist.

Aus diesem Grund ist es eine didaktische Herausforderung, die Schüler\*innen davon zu überzeugen, dass die Parkettierung auf der Ebene  $\mathbb{E}$  existiert. Dazu bieten sich die Abbildungen 3.2, 3.4 und 3.6 bzw. 3.3, 3.5 und 3.7 an. Die Inflation trägt dafür Sorge, dass die Kacheln auf eine bestimmte Art und Weise aneinander gelegt werden. Das ist in diesen Bildern gut zu sehen. Somit kann den Schüler\*innen anhand der Bilder erklärt werden, dass es immer eine Möglichkeit des Anlegens gibt. Dabei kann auch auf den Algorithmus verwiesen werden, der die Bilder erzeugt, allerdings sollte er nicht im Detail behandelt werden.

Auf diesen Bildern ist außerdem die fünffache Dreh- und Achsensymmetrie zu

sehen, die die Penrose-Parkettierungen aufweisen, die sich aus der Sonne oder dem Stern entwickeln. Auch dieser Aspekt der Symmetrie kann mit den Schüler\*innen untersucht werden, wenn sie bei der nicht-eingefärbten Parkettierung eine ausgewählte Figur anmalen, wenn dabei eine Dekomposition der Sonne oder des Sterns vorliegt.

---

## Literaturverzeichnis

---

- [BB02] BOROWSKI, Ephraim J. ; BORWEIN, Jonathan M.: *Collins Dictionary of Mathematics*. London : Collins, 2002
- [BC11] BRUDER, Regina ; COLLET, Christina: *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin, 2011
- [Beh12] BEHRENDTS, Ehrhard: Penrose-Parkettierungen mit „goldenen“ Drachen. In: *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft Hamburg* Band 32 (2012), S. 1–28
- [BP95] BEUTELSPACHER, Albrecht ; PETRI, Bernhard: *Der Goldene Schnitt*. Mannheim, 1995
- [Bru90] BRUIJN, N.G de: Updown Generation of Penrose Patterns. In: *Indagationes Mathematicae* 1 (1990), Nr. 2, S. 201–219
- [Bru92] BRUIJN, N.G de: Penrose Patterns are almost entirely determined by two Points. In: *Discrete Mathematics* 106 (1992), Nr. 1, S. 97–104
- [BSMM04] BRONSHTEIN, I.N. ; SEMENDYAYEV, K.A. ; MUSIOL, G. ; MUEHLING, H.: *Handbook of Mathematics*. Berlin, Heidelberg, 2004
- [Dob10] DOBROWOLSKI, Manfred: *Angewandte Funktionalanalysis: Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen*. Berlin, Heidelberg, 2010

- [ER16] ESCHENBURG, J.-H. ; RIVERTZ, H.J.: The Penrose Decagon. 62 (2016), Nr. 1, S. 1–14
- [ER17] ESCHENBURG, J.-H. ; RIVERTZ, H. J.: The Complete Cartwheel Tiling. In: *Journal of Geometry* 108 (2017), Nr. 2, S. 703–717
- [For16] FORSTER, Otto: *Analysis 1*. Wiesbaden, 2016
- [Fuc08] FUCHS, Eugenia: Behind the Intuition of Tilings. (2008).  
– Online unter <https://pdfs.semanticscholar.org/b2fe/3f6a9887a02f67caec86c5d1333f33a36984.pdf>; abgerufen am 15. Januar 2019
- [Gab12] GABORIT, Paul: *Penrose Tiling in TikZ*. Website, 2012.  
– Online unter <https://tex.stackexchange.com/questions/61437/penrose-tiling-in-tikz>; abgerufen am 15. Januar 2019
- [Gar89] GARDNER, Martin: *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*. New York, 1989
- [Gla14] GLAESER, Georg: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Berlin, Heidelberg, 2014
- [GS16] GRÜNBAUM, Branko ; SHEPHARD, Geoffrey C.: *Tilings and Patterns*. New York, 2016
- [Gum96] GUMMELT, Petra: Penrose Tilings as Coverings of Congruent Decagons. In: *GEOMETRIAE DEDICATA* 62 (1996), Nr. 1, S. 1–17
- [KV18] KASTEN, Hendrik ; VOGEL, Denis: *Grundlagen der ebenen Geometrie*. Berlin, Heidelberg : Springer Spektrum, 2018
- [Lam05] LAMOTKE, Klaus: Die Symmetriegruppen der ebenen Ornamente. In: *Mathematische Semesterberichte* 52 (2005), Nr. 2, S. 153–174
- [Min04] MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG: *Allgemein bildendes Gymnasium. Bildungsplan 2004*. 2004. – Online unter <http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsw/Bildungsplaene/>

- Bildungsplaene-2004/Bildungsstandards/Gymnasium\_Bildungsplan\_Gesamt.pdf; abgerufen am 06. März 2019
- [Min16a] MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG: *Bildungsplan 2016: Mathematik. Bildungsplan des Gymnasiums*. 2016. – Online unter [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_M.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_M.pdf); abgerufen am 06. März 2019
- [Min16b] MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG: *Bildungsplan 2016: Mathematik. Gemeinsamer Bildungsplan für die Sekundarstufe*. 2016. – Online unter [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_M.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_M.pdf); abgerufen am 06. März 2019
- [Pen79] PENROSE, Roger: Pentaplexity. In: *The Mathematical Intelligencer* 2 (1979), Nr. 1, S. 32–37
- [Pen87] PENROSE, Roger: Filling the Plane. In: *Nature* 326 (1987)
- [Rit14] RITTER, Alexander F.: Lectures on Penrose Tilings. In: *Oxford Masterclasses in Geometry 2014. Part 2*. (2014)
- [WFH<sup>+</sup>18] WEIGAND, Hans-Georg ; FILLER, Andreas ; HÖLZL, Reinhard ; KUNTZE, Sebastian ; LUDWIG, Matthias ; ROTH, Jürgen ; SCHMIDT-THIEME, Barbara ; WITTMANN, Gerald: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Berlin, Heidelberg, 2018